Termin-ID: NTIwODE5

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 14.12.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

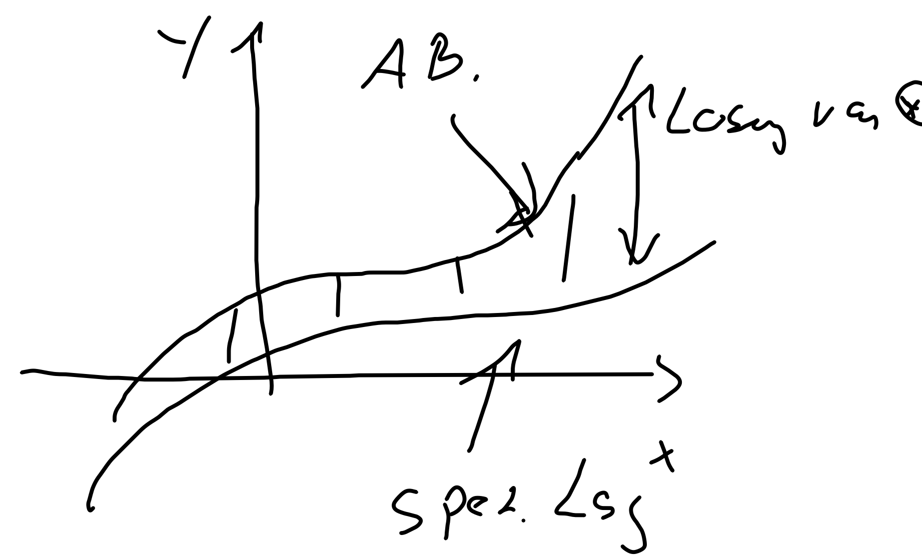
Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

$$\underbrace{y' = g(x)\cdot y}_{} + h(x) \qquad (*)$$

Lösung ist $C \cdot e^{G(x)}$

Allgemeine Lösung der lin. DGL mit Inhomogenität $h(x)$ ist gegeben durch eine spezielle Lösung von $(*)$ plus einer Lösung der homogenen linearen DGL $y' = g(x)\cdot y$.



Suche nach einer speziellen Lösung von $(*)$:

Rezept: Ansatz: $y(x) = C(x)\cdot e^{G(x)}$

Einsetzen in $(*)$, suche $C(x)$ so, dass es passt:

$$y'(x) = C'(x)e^{G(x)} + \cancel{C(x)\, g(x)\, e^{G(x)}} = \cancel{g(x)\, C(x)\, e^{G(x)}} + h(x)$$

$$C'(x) = \frac{h(x)}{e^{G(x)}}$$

$C(x)$ ist Stammfkt von $\dfrac{h(x)}{e^{G(x)}}$

Bsp: $y' = xy + x^3$

1) Betrachte die homogene DGl $y' = xy$

$$y = C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

2) Suche den speziellen: Ansatz $y = C(x)\, e^{+\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow y' = C' e^{\frac{x^2}{2}} + \cancel{C\, x\, e^{\frac{x^2}{2}}} = \cancel{x\cdot C e^{\frac{x^2}{2}}} + x^3$$

$$C' = \underline{x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\left(-2x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

P.I: $-x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} = C(x)$, da

$$C'(x) = \cancel{-2x e^{-\frac{x^2}{2}}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \cancel{- 2e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}$$

$$y(x) = (-x^2-2)\cdot \cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}}\cdot \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Probe: $y' = -2x$

$$xy + x^3 = (-x^2-2)\cdot x + x^3 = -x^3 - 2x + x^3 = -2x$$

Allgemeine Lsg: $y(x) = (-x^2-2) + C e^{\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbed. z B $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 = (-2+0) + C e^{\frac{0^2}{2}}$$

$$1 = -2 + C \Rightarrow C = 3$$

$y(x) = (-2 - x^2) + 3 e^{\frac{x^2}{2}}$ ist Lösung von $(*)$ zur

Anfangsbed. $y(0) = 1$.

Existenz und Eindeutigkeit von DGL 1. Ordnung

Wir betrachten eine DGL der Form $y' = f(x,y)$

Satz (Picard-Lindelöff) Sei $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw $[a,b] \times B \to B$ für B Banachraum) stetig und global Lipschitz stetig im 2. Argument, d.h. $\exists L > 0$ so dass $\forall y, z \in B$ und $\forall x \in [a,b]$

$$\| f(x,y) - f(x,z) \| \le L \| y - z \| .$$

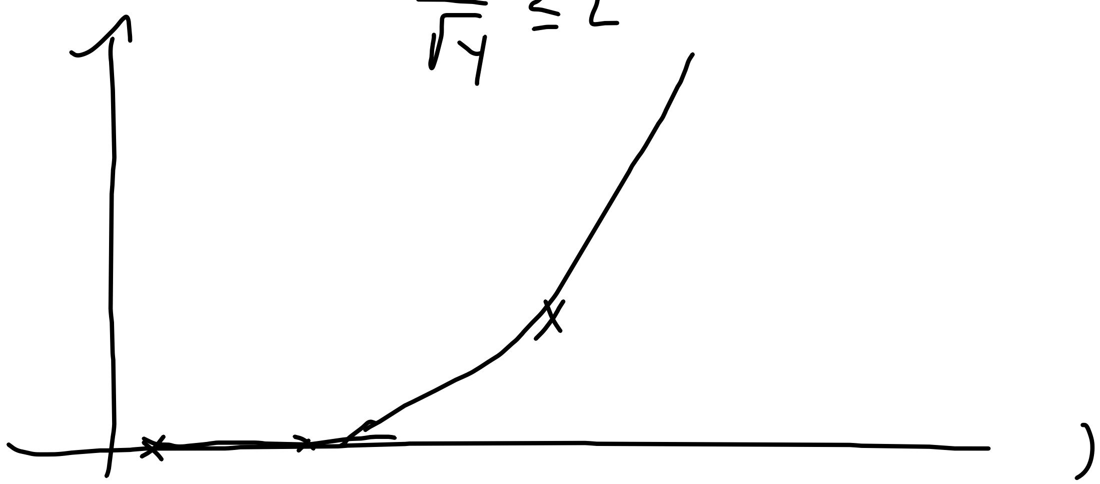
Dann existiert zu jeder Anfangsbed $(x_0, y_0) \in (a,b) \times B$ eine eindeutige globale Lösung der DGL.

Erinnerung an das Bsp $y' = 2\sqrt{y}$.

d.h. $f(x,y) = 2\sqrt{y}$. Das ist nicht Lipschitz stetig!

$z=0$: $\left|\sqrt{y} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{y} \overset{?}{\leq} L \cdot |y| \quad \forall y$

$\frac{1}{\sqrt{y}} \overset{?}{\leq} L \quad \forall y \quad \lightning$



<u>Beweis des Satzes:</u> Zunächst suchen wir nach einer lokalen Lösung, "global" folgt später.

Wir betrachten stetige Funktionen von $[a,b] \to B$ als Elemente eines neuen Banachraumes mit Norm $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $\|y\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} \|y(x)\|$ $\left(\sup_{x\in[a,b]} |y(x)| \text{ falls } B=\mathbb{R} \right)$

(Vollständigkeit folgt später, wird hier erstmal angenommen)

Wir betrachten erstmal lokale Eigenschaften, $a<b$ ist also noch frei wählbar. o.B.d.A sei $x_0 = 0$, d.h. $a<0<b$.

Definiere die Abbildung $T: C \to C$ (C ist der "neue" Banachraum) geg. durch

$$T(y) := y_0 + \int_0^x f(s, y(s))\, ds$$

Ein Fixpunkt dieser Abbildung T hat die Eigenschaft

$$y = T(y) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s))\, ds \quad \text{d.h.}$$

d.h.

a) $y(0) = y_0$ AWP

b) $y' = 0 + f(x, y(x))$ DGL

Es fehlt nur zu zeigen, dass T kontrahierend ist.
Dann folgt mit dem Fixpunktsatz von Banach die Eindeutigkeit des Fixpunktes. Da Fixpunkte von T genau die Lösungen der DGL zum AWP sind hat man lokale Ex. und Eind. der Lösungen.

$$\|T(y)-T(z)\|_\infty = \left\| \cancel{y_0} + \int_0^x f(s,y(s))\,ds - \cancel{y_0} - \int_0^x f(s,z(s))\,ds \right\|_\infty$$

$$= \left\| \int_0^x f(s,y(s)) - f(s,z(s))\,ds \right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left\| \int_0^x f(s,y(s)) - f(s,z(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,b]} \int_0^x \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\|\,ds \qquad \left(\text{bzw } \sup_{x\in[-a,0]} \text{ analog}\right)$$

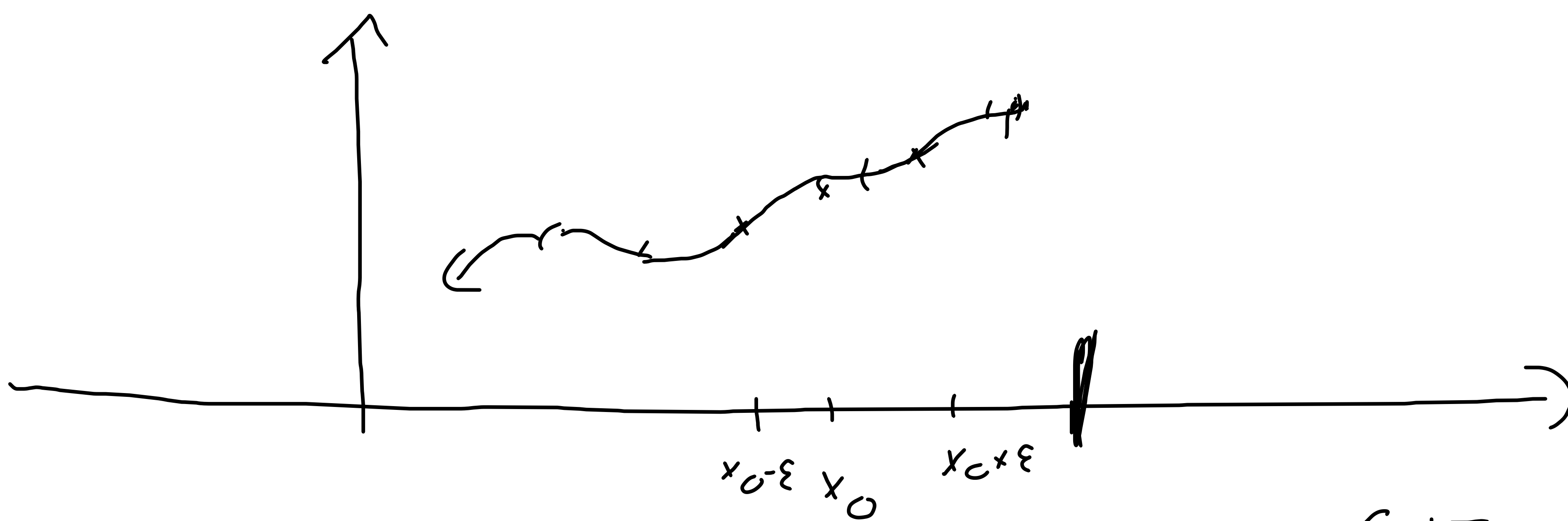
$$\leq \int_0^b L\,\|y(s)-z(s)\|\,ds \leq L\cdot\|y-z\|_\infty \cdot b$$

wähle $b = \frac{1}{2L}$ dann ist das eine Kontraktion

$a = \frac{-1}{2L}$

Wir haben also Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in $\left[\frac{-1}{2L}+x_0, \frac{1}{2L}+x_0\right]$

Globale Aussage (a kann auch $-\infty$
b kann auch $+\infty$ sein.)



$\varepsilon := \frac{1}{2L}$

Da die Intervalllänge nicht von x_0, y_0 abhängt kann ich die lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung zusammenfügen.

Es gibt auch lokale Versionen des Satzes.