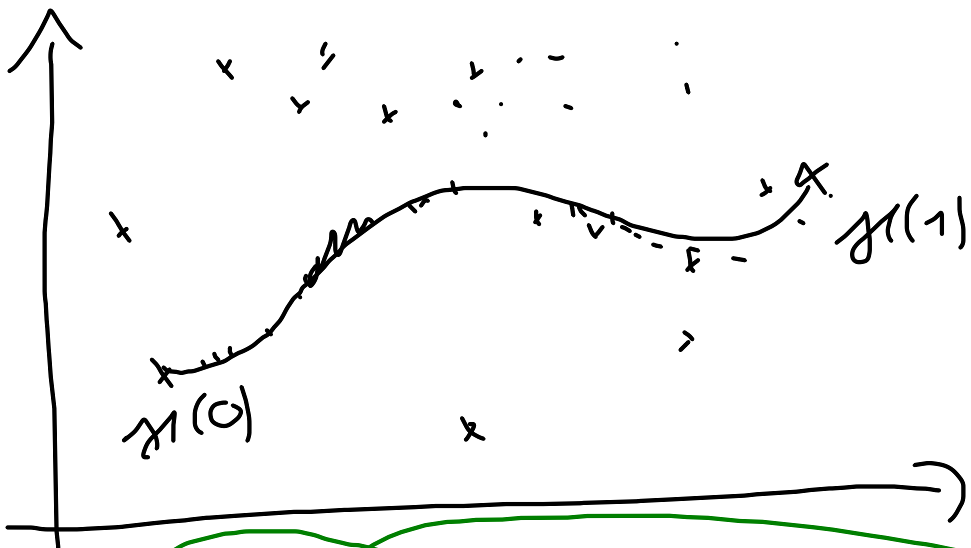
Termin-ID: NTIwODAz

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)
Datum: 15.11.21
Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45
Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.



$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

Integral 1. Art.

<u>Definition</u>: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar.

Man nennt: $\int_a^b \langle f, \gamma' \rangle \, dt$ Integral 2. Art. (Arbeitsintegral)

$\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$

<u>Bemerkung</u>: Die Integrale (Kurvenintegral, Integral 1. und 2. Art) sind wohl definiert da die Integranden stetig sind.

(Skalarprodukt ist stetig: $\langle v + \underset{\equiv}{\varepsilon}, w \rangle = \langle v, w \rangle + \underbrace{\langle \varepsilon, w \rangle}$

$|\langle \varepsilon, w \rangle| \leq \|\varepsilon\| \cdot \|w\|$)

Bsp: Arbeitsintegral. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = x \cdot |x|$

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \vec{a} \cdot t \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^1 \langle \vec{a} \cdot t \cdot \|\vec{a}\|_2 t, \vec{a} \rangle \, dt = \|\vec{a}\|_2^3 \int_0^1 t^2 \, dt = \|\vec{a}\|_2^3 \cdot \frac{1}{3}$$

Satz: Falls die Kurven <u>injektiv</u> sind, sind Länge und Integrale 1. und 2. Art von der Parametrisierung unabhängig, d.h. unterschiedliche Kurven mit der selben Spur haben das selbe Integral. (außer VZ)

Beweis:
$$\int_a^b \langle f(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \rangle \, dt \underset{\text{subst}}{=} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \langle f(\lambda(t)), \lambda'(t) \rangle \, dt$$

$$\lambda := \gamma \circ \phi$$

(1. Art analog).

Frage: Hängen die Integrale vom gewählten Weg oder entl. nur vom Anfangspkt und Endpunkt ab. <u>A</u>: Im allgemeinen ja.

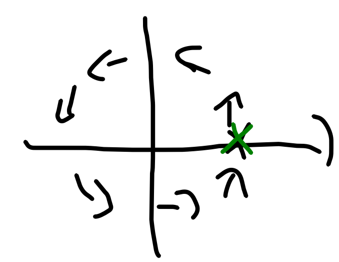
Definition: Ein Integral 2. Art heißt wegunabhängig, falls der Wert nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt.

In diesem Fall lässt sich eine Stammfunktion definieren (nennt man auch Potential)

d.h. $\underline{\int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt} = \underline{V}(\gamma(b)) - \underline{V}(\gamma(a))$

(mehr dazu später).

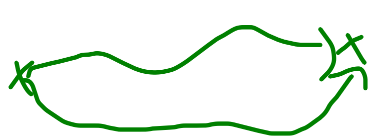
Bsp: wegabhängig sind Integrale für

"  "

$$f(x) = f((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|x\|_2^2}$$

Bemerkung: Falls wir von injektiv sprechen ist es ausreichend, wenn dies bis auf endlich viele Punkte gilt.

Wegunabhängig $\Longleftrightarrow$ geschlossene Wege ergeben Integral 0.



Differenzierbarkeit für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Erinnerung aus Ana I: f ist diff.bar an der Stelle a $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} := f'(a) \text{ existiert.}$$

Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist erstmal unklar, wie man das verallgemeinern soll:

In diesem Fall ist h ein Vektor im $\mathbb{R}^n$! Wie teile ich durch einen Vektor?

Alternative Definition: Lineare Approximierbarkeit, f ist diff.bar bei a

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + o(h) \qquad (h = x-a)$$

($o(h)$ benutzt man für alles, mit der Eigenschaft $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0}$

($O(h)$: Bei $\frac{O(h)}{h}$ ist beschränkt bei der 0)

Vergleiche $o(h)$ mit h und sieht

$o(h) \ll h$

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$

total differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Matrix $f'(a) \in M(1 \times n)$

so dass
$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - f'(a)\, h \|}{\| h \|} = 0$$

Beispiel: $f(x) = \langle x, x \rangle \qquad a = (1, 0)$

$$f(a+h) = \langle a+h, a+h \rangle = \underbrace{\langle a, a \rangle}_{f(a)} + \underbrace{2 \langle a, h \rangle}_{f'(a) \cdot h} + \underbrace{\langle h, h \rangle}_{\text{Rest}}$$

$$f'(a) = 2a^t$$

$$(f'_1, f'_2\ f'_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$f'(a)$ lineare Abb. von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Zeilenvektor falls "x" Spalte)

Bemerkung: Die Verallgemeinerung auf $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist klar!

$$f'(a) = M(m \times n) \qquad f'(a) \cdot x \in \mathbb{R}^m.$$

Alternativer Zugang: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x_1, x_2 \dots) \to \mathbb{R}$

Hält man alle n Variablen bis auf eine Variable fest, dann hat man eine Funktion mit 1 Variablen und $n-1$ Parameter.

Wir benutzen einfach direkt die Ana I Definition.

Definition: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $x = (x_1, x_2 \dots)$ Die Ableitung

$$\frac{d}{dx_j} f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_j) - f(x)}{h} \qquad \Big(e_j = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j.\text{-Stelle}}}{1}, \dots 0) \Big)$$

nennt man, falls existent, partielle Ableitung nach x_j.

f heißt an der Stelle x partiell diffbar, falls bei x alle partiellen Ableitungen existieren.