Termin-ID: NTIwODMw

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 16.11.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Definition: Sei $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor, d.h. $\|\vec{r}\|_2 = 1$.

Dann heißt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{r}) - f(\vec{x})}{h}$

für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Richtungsableitung von f. ...

Satz: f an der Stelle $\vec{a}$ total diff.bar

$\Rightarrow$ alle Richtungsableitungen an der Stelle $\vec{a}$ existieren

$\Rightarrow$ f an der Stelle $\vec{a}$ partiell diff.bar.

Beweis: "$\Rightarrow_1$" Sei f total diffbar, dann ist

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - f'(\vec{a}) \cdot \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Wenn man sich auf $\vec{h} = h \cdot \vec{r}$, $\vec{r}$ fix einschränkt hat man die Richtungsableitung.

"$\Rightarrow_2$" trivial, die part. Ableitungen sind besondere Richtungsabl.

Es gilt außerdem $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{r}) - f(\vec{x})}{h} = \underbrace{f'(a) \cdot \vec{r}}_{\in \mathbb{R}^m}$

Die Spalten von $f'(a)$ sind die entsprechenden partiellen Ableitungen. Diese definieren also $f'(a)$.
(Achtung! Dies funktioniert nur wenn f total diffbar.)

<u>Satz</u>: Falls f bei $\vec{a}$ total diffbar dann ist f dort auch stetig.

<u>Beweis</u>:

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) - \overbrace{f'(\vec{a})\cdot\vec{h}}^{\to 0}}{\|\vec{h}\|} = 0 \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) = 0$$

<u>Bemerkung</u>: Falls f partiell diffbar bei $\vec{a}$, so muss f noch nicht mal bei $\vec{a}$ stetig sein!

Betrachte z. B.
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x\cdot y = 0 \\ ? & \text{sonst.} \end{cases}$$

An der Stelle $(0,0)$ sind beide part. Abl. Null,

partiell diffbar $\not\Rightarrow$ alle Richtungsabl. ex. $\not\Rightarrow$ total diffbar

klar an Hand des Bsp

Bsp: Für alle Richtungsabl. existieren aber nicht total diffbar (nicht mal stetig)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y=0 \\ \frac{x^2}{y} & \text{sonst.} \end{cases}$$

f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

Betrachte dazu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (0,0) \qquad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 = f((0,0))$$

Alle Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$ existieren.

1. Fall. $\vec{v} = (1,0) \Rightarrow f(x,0) \equiv 0 \Rightarrow$ Richtungsabl. ist 0.

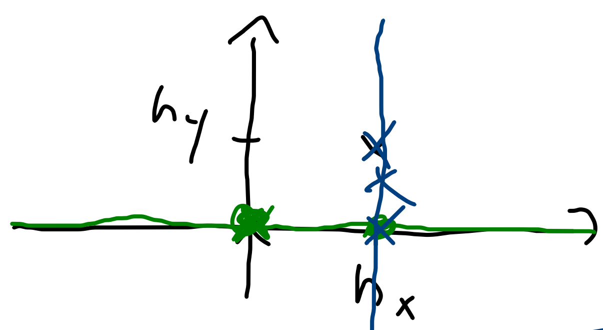
2. Fall: $\vec{v} = (\alpha, \beta) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad \beta \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{v}\cdot h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\alpha^2 h^2}{\beta \cdot h}}{h} = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

Satz: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung von $\vec{a}$ partiell diffbar und alle partiellen Ableitungen seien an der Stelle $\vec{a}$ stetig.
("f ist stetig partiell diffbar")
Dann ist f bei $\vec{a}$ total diffbar.

Bsp: $f = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \frac{d}{dx} f = \frac{2x}{y}$ $\quad \frac{d}{dy} f = -\frac{x^2}{y^2}$ unstetig bei 0.

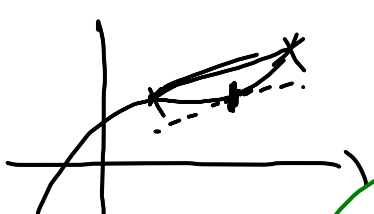
Beweis: O.B.d.A. sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{a} = (0,0)$, $f(0,0) = 0$.



z.z.: $\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(\vec{h}) - 0 - f'(0,0) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

Betrachte $f(h_x, h_y) = f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) + \underbrace{f(h_x, 0) - 0}$

Nach MWS existiert ein $\xi \in [0, h_x]$ mit $f(h_x, 0) - 0 = \frac{d}{dx} f(\xi, 0) \cdot h_x$



ebenso existiert ein $\eta \in [0, h_y]$ mit $f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) = \frac{d}{dy} f(h_x, \eta) \cdot h_y$

$$\Rightarrow f(h_x, h_y) = \frac{d}{dx} f(\xi, 0) \cdot h_x + \frac{d}{dy} f(h_x, \eta) \cdot h_y$$

$$\Rightarrow \quad f(h_x,h_y) - f'(0,0)\cdot\vec{h} = \frac{d}{dx} f(\xi,0)\cdot h_x + \frac{d}{dy} f(h_x,\eta)\cdot h_y$$
$$- \left(\frac{d}{dx} f(0,0), \frac{d}{dy} f(0,0)\right)\cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{d}{dx} f(\xi,0) - \frac{d}{dx} f(0,0)\right)\cdot h_x + \left(\frac{d}{dy} f(h_x,\eta) - \frac{d}{dy} f(0,0)\right)\cdot h_y$$

$$\frac{|\ldots|}{\|h\|_2} \le \left|\frac{d}{dx} f(\underbrace{\xi,0}_{\to 0}) - \frac{d}{dx} f(0,0)\right| + \left|\frac{d}{dy} f(\underbrace{h_x,\eta}_{\to 0}) - \frac{d}{dy} f(0,0)\right| = (*)$$

da $\xi \in [0,h_x]$ und $\eta \in [0,h_y]$ ist

$$\lim_{h\to 0} \xi = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \eta = 0$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind gilt:

$$\lim_{h\to 0} (*) = 0 \qquad \square$$

Einschub f ist diffbar ⇒ R. A

$$\lim_{\vec h\to 0}\frac{f(\vec a+\vec h)-f(\vec a)-f'(\vec a)\cdot\vec h}{\|\vec h\|}=\vec 0$$

Wähle $\vec h=\vec r\cdot h$ $\qquad h\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec a+\vec r\cdot h)-f(\vec a)-f'(a)\cdot h\cdot\vec r}{\|h\cdot\vec r\|}=\vec 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec a+\vec r\cdot h)-f(\vec a)-f'(a)\cdot h\cdot\vec r}{|h|}=\pm\vec 0 \qquad \leftarrow \cdot\frac{h}{|h|}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec a+\vec r\cdot h)-f(\vec a)-f'(a)\cdot h\cdot\vec r}{h}=\vec 0 \qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec a+\vec r h)-f(\vec a)}{h}-f'(a)\cdot\vec r=\vec 0 \qquad \frac{\vec V}{a} \quad ✓$$

$$\lim \vec v_n=\vec v \iff \lim\|\vec v_n-\vec v\|=0$$

Notation: Falls $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man f' auch den Gradienten von f, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{d}{dx} f, \frac{d}{dy} f, \dots\right)$

$\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Rechenregeln:

Satz: Seien f, g total diffbar, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + g$ ist total diffbar. Dies gilt punktweise wie global.

Die Menge der total diffbaren Funktionen ist ein Vektorraum.

Beweis:

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\alpha f(\vec{a}+\vec{h}) + g(\vec{a}+\vec{h}) - [\alpha f(\vec{a}) + g(\vec{a})] - [\alpha f'(\vec{a}) + g'(\vec{a})]\,\vec{h}}{\|h\|}$$

$$= 0$$

Der Gradient von $\alpha f + g$ ist gleich $\alpha \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$.

Analoges gilt $f'(\vec{a})$

$\longrightarrow$ Ähnliches gilt für partielle Diffbarkeit und Existenz von Richtungsableitungen