Termin-ID: NTIwODA4

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 17.01.22

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

b) $$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Diese Funktion ist "bei der Null" unbeschränkt, daher nicht im eigentlichen Sinne integrierbar.

Zunächst die eine, dann die andere Integration lässt sich jedoch ausführen. Die Integrale existieren zum Teil nur uneigentlich.

Zunächst:
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \underline{\underline{dy}} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 dx = (*)$$

NR: $$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \checkmark$$

$$(*) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Aus Symmetriegründen ist $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = -\frac{\pi}{4}$

$$\left(\iint \ldots = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_0^1 dx \ \ldots \ = -\frac{\pi}{4} \right)$$

Weitere Eigenschaften des Integrals

Wir beschäftigen uns weiterhin mit eigentlichen Integralen. Die integrierbaren Funktionen sind immer beschränkt.

Satz: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert eine Folge $(\vec{n}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ $\quad (Q \subset \mathbb{R}^d$ Quader$)$

so dass $\lim\limits_{\ell \to \infty} O^f(\vec{n}_\ell) - U^f(\vec{n}_\ell) = 0$

und umgekehrt.

Beweis: Integrierbar ist per Def. gleichbedeutend mit

$$\underbrace{\inf \{ O^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^d \}}_{O} = \underbrace{\sup \{ U^f(\vec{m}) : \vec{m} \in \mathbb{N}^d \}}_{U}$$

$$\Rightarrow \exists (\vec{m}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}, (\vec{n}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} : \lim_{\ell \to \infty} O^f(\vec{n}_\ell) = \lim_{\ell \to \infty} U^f(\vec{m}_\ell)$$

d.h. $\lim\limits_{\ell \to \infty} O^f(\vec{n}_\ell) - U^f(\vec{m}_\ell) = 0$

Sei $\tilde{\vec{n}}_\ell \in \mathbb{N}^d$: $\quad (\tilde{\vec{n}}_\ell = \vec{n}_\ell \cdot \vec{m}_\ell$ komponentenweise$)$

$$\Rightarrow \quad O^f(\tilde{\vec n}_\ell) \le O^f(\vec n_\ell) \qquad\qquad U^f(\tilde{\vec n}_\ell) \ge U^f(\vec m_\ell)$$

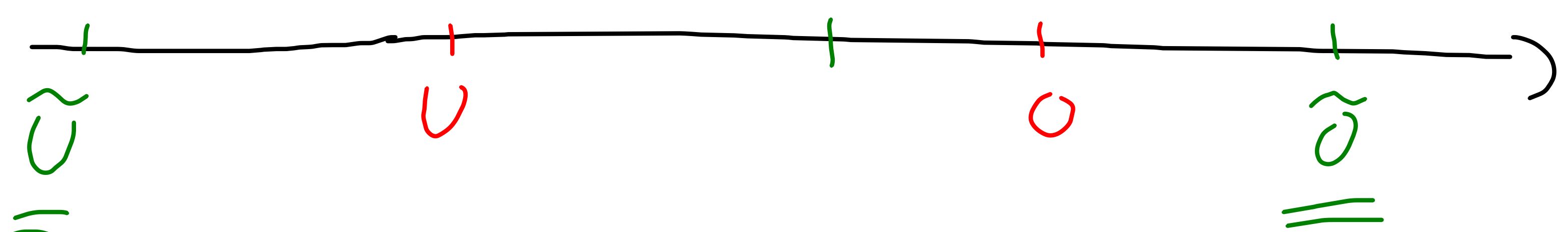
$$\Rightarrow \quad 0 \le \underbrace{O^f(\tilde{\vec n}_\ell) - U^f(\tilde{\vec n}_\ell)}_{\to 0} \le \underbrace{O^f(\vec n_\ell) - U^f(\vec m_\ell)}_{\to 0}$$

Umkehrung ist direkt:

$$\lim_{\ell \to \infty} O^f(\vec n_\ell) - U^f(\vec n_\ell) = 0$$

$$\overbrace{\inf\left\{O^f(\vec n) : \vec n \in \mathbb{N}^\delta\right\}}^{O} \le \overbrace{\inf\left\{O^f(\vec n_\ell) : \ell \in \mathbb{N}\right\}}^{\tilde O} \qquad \Rightarrow \quad O = U$$

$$\underbrace{\sup\left\{U^f(\vec n) : \vec n \in \mathbb{N}^\delta\right\}}_{U} \ge \underbrace{\sup\left\{U^f(\vec m_\ell) : \ell \in \mathbb{N}\right\}}_{\tilde U}$$



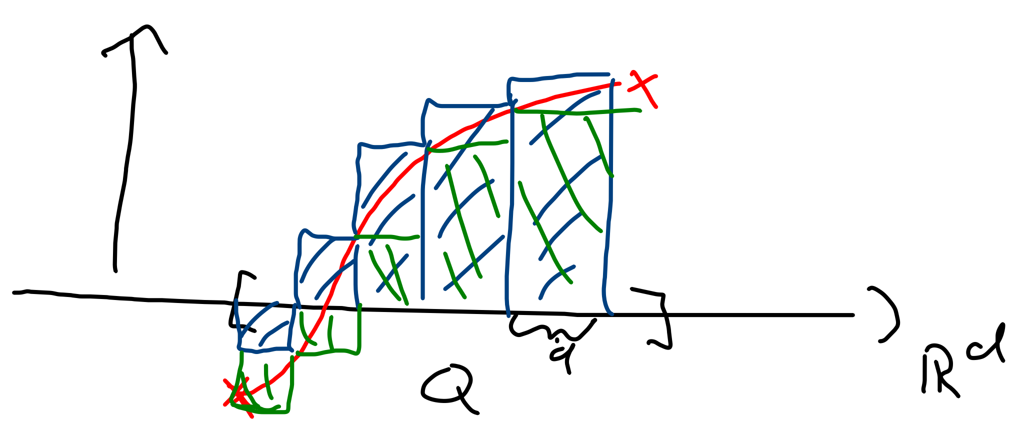
Satz: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch $f^+ : Q \to \mathbb{R}$ und $f^- : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Hier ist $f^{+/-}$ der positive/negative Anteil der Funktion f:

$$f^+(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{falls} \quad f(\vec{x}) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f^-(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{falls} \quad f(\vec{x}) < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: f integrierbar $\Rightarrow \exists \, (\vec{n}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ mit

$$\lim_{k \to \infty} O^f(\vec{n}_k) - U^f(\vec{n}_k) = 0.$$



Wir vergleichen $O^f(\vec{n}_k) - U^f(\vec{n}_k)$ mit $O^{f^+}(\vec{n}_k) - U^{f^+}(\vec{n}_k)$.

Für jeden einzelnen Balken gilt, dass die Differenz von oberer und unterer Abschätzung nicht größer wird.

1\. Fall: $\sup\{f(\vec{x}) : x \in q\} > 0$ $\inf\{f(\vec{x}) : x \in q\} > 0$

für Teilquader q

dann ist $\sup\{f(\vec{x}) : x \in q\} - \inf\{f(\vec{x}) : x \in q\} =$

$= \sup\{f^+(\vec{x}) : x \in q\} - \inf\{f^+(\vec{x}) : x \in q\}$

2\. Fall: $\sup \dots > 0$ $\inf \dots < 0$

$\Rightarrow \sup\{f(\vec{x}) : x \in q\} = \sup\{f^+(\vec{x}) : x \in q\}$

$0 > \underline{\inf\{f(\vec{x}) : x \in q}\} < \underline{\inf\{f^+(\vec{x}) : x \in q}\} \geq 0$

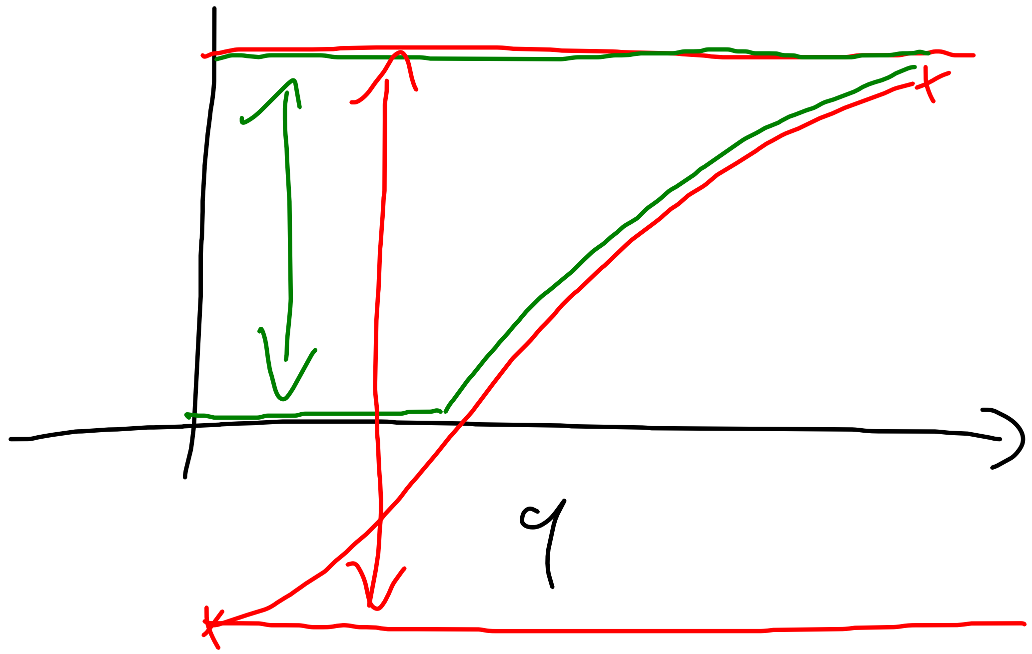
3\. Fall: $\sup < 0$ $\inf < 0$

$\Rightarrow f^+ \equiv 0$ auf q.

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{O^{f^+}(\vec{n}_k) - U^{f^+}(\vec{n}_k)}_{\to 0} \leq \underbrace{O^f(\vec{n}_k) - U^f(\vec{n}_k)}_{\to 0}$$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow f^+$ integrierbar.

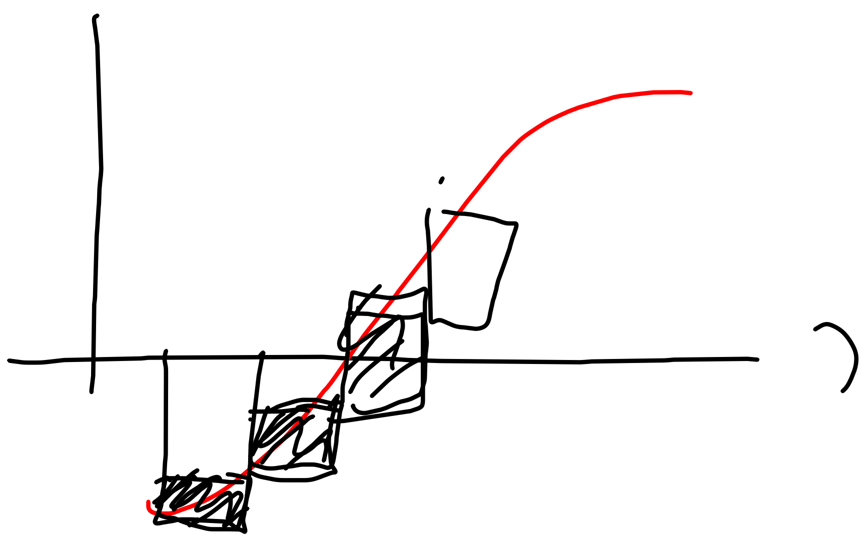


$\sup\{f(x)\ x \in q\}$

$= \sup\{f^+(x) \ldots$

$\inf\{f^+(x) : x \in q\} = 0$

$\inf\{f(x)\ x \in q\}$



Satz: Seien D_1, D_2 beschränkt, $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dann gilt:

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D_1} f(x)\,dx + \int_{D_2} f(x)\,dx$$

falls die rechte Seite existiert.

(d.h. falls $\int_{D_1}$ ex und $\int_{D_2}$ ex, dann existiert $\int_D$ und die Formel gilt)

Beweis: Dies ist Sonderfall von $\int f+g = \int f + \int g$:

$$\int_D f(x)\,dx := \int_Q 1\!\!1_D(x)\, f(x)\,dx = \int_Q \left[1\!\!1_{D_1}(x) + 1\!\!1_{D_2}(x)\right] f(x)\,dx =$$

$$= \int_Q 1\!\!1_{D_1}(x) f(x)\,dx + \int_Q 1\!\!1_{D_2}(x) f(x)\,dx = \int_{D_1} f(x)\,dx + \int_{D_2} f(x)\,dx$$

wobei $D \subset Q$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ Quader.