Termin-ID: NTIwODIz

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 18.01.22

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Satz: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ jordanmessbar, f sei integrierbar.

Dann gilt: $\inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\}\, |D| \leq \int_D f(\vec{x})\, d^n x \leq \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\} \cdot |D|$

$|D|$ ist hier das Jordan-maß von D.

Beweis: Direkte Konsequenz aus der Monotonie:

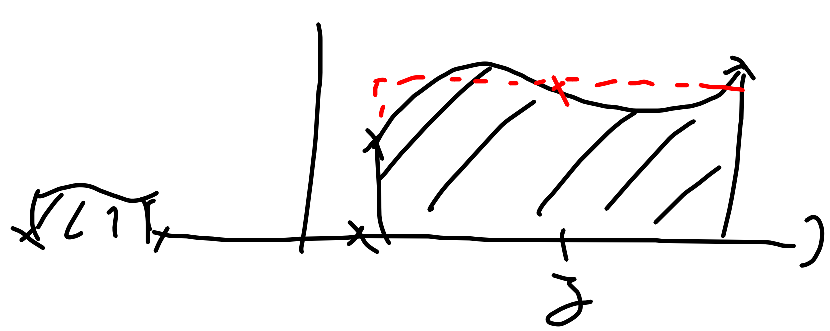
$g: D \to \mathbb{R}$ sei def. als $g \equiv \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\}$ auf D

$g \geq f$ (auf D) $\Rightarrow$ $g\, 1\!\!1_D \geq f\, 1\!\!1_D$

$$\Rightarrow \int_D g(\vec{x})\, d^n x = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\} \cdot \underbrace{\int_Q 1\!\!1_D\, d^n x}_{:= |D|} \underset{\text{monotonie}}{\geq} \int_D f(\vec{x})\, d^n x$$

andere Abschn. analog. $\square$

Mittelwertsatz Ana 1



$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Satz (Mittelwertsatz): Sei D einfach wegzusammenhängend, Jordan messbar und abgeschlossen, $D \subset \mathbb{R}^n$.

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig.

($\int_D f$ existiert daher, wie wir gleich sehen werden)

Dann gilt: $\exists\, \xi \in D$ mit $f(\xi) \cdot |D| = \int_D f(\vec{x})\, d^n x$

Beweis: D ist kompakt, da beschr. + abgeschl. $\Rightarrow$ f hat auf D max + min.

$\Rightarrow \exists\, M \in D$ mit $f(M) \cdot |D| \geq \int_D f(\vec{x})\, d^n x$

$\exists\, m \in D$ mit $f(m) \cdot |D| \leq \int_D f(\vec{x})\, d^n(x)$

Sei $\gamma: [0,1] \to D$ eine Kurve mit $\gamma(0) = m$, $\gamma(1) = M$.

Nach Zwischenwertsatz gibt es ein t mit $f(\gamma(t)) = \dfrac{\int_D f(\vec{x})\, d^n x}{|D|}$

zwischen $f(m)$ und $f(M)$

$\gamma(t) = \xi$

$f(\xi) \cdot |D| = \int_D f(\vec{x})\, d^n x$.

Satz: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, $Q \in \mathbb{R}^n$ Quader.
sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $g \circ f$ auf Q integrierbar.

Folgerungen: Die quadrat. Fkt ist stetig.
$\Rightarrow$ (f integrierbar $\Rightarrow$ f^2 integrierbar)

f, h integr. $\Rightarrow$ $f+h$ int.bar $\Rightarrow$ $(f+h)^2$ auch
$$= f^2 + 2\boxed{fh} + h^2$$

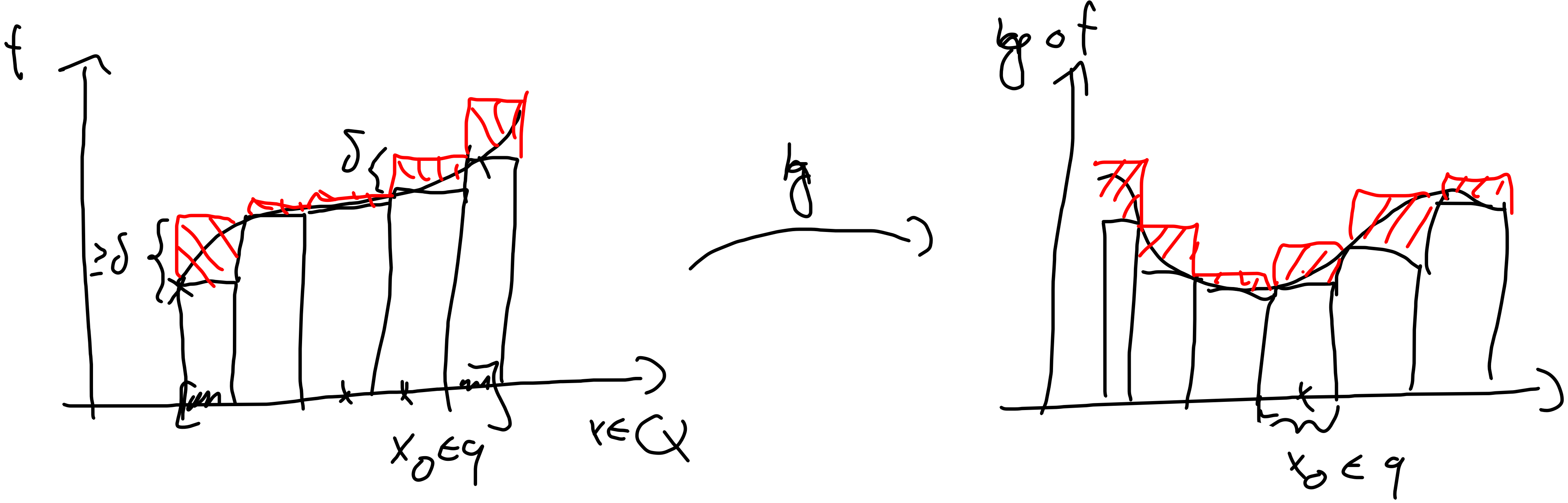
d.h. falls f, h integrierbar, so auch das Produkt $f \cdot h$.

Beweis: Integrierbar: $\exists (\vec{n}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ mit $\lim_{k \to \infty} O(\vec{n}_k) - U(\vec{n}_k) = 0$

z.z: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ ~~so~~ so dass $O^{g \circ f}(\vec{n}_k) - U^{g \circ f}(\vec{n}_k) < \varepsilon$
$\forall k \geq k_0$
für geeignete Folge $(\vec{n}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$\forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass $|g(y) - g(z)| < \eta$ falls $|y - z| < \delta$
und $y, z \in I$

I ist hier das kompakte Intervall $[\inf\{f(x) : x \in Q\}, \sup\{f(x)\ x \in Q\}]$



$$\sup\{g\circ f(x): x\in q\} - \inf\{g\circ f(x): x\in q\} \le \eta$$

falls $\sup\{f(x): x\in q\} - \inf\{f(x) : x\in q\} \le \delta$

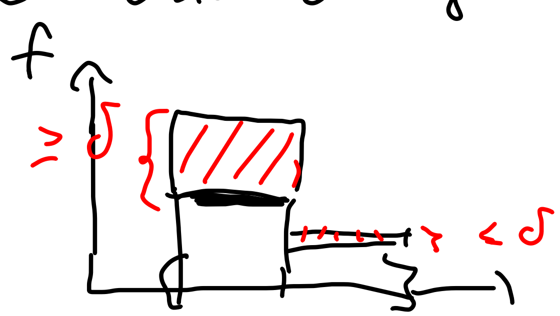
Bed: $\forall \tau > 0 \ \exists \ell_0 : \ O^f(\vec{n}_\ell) - U^f(n_\ell) < \tau \quad \forall \ \ell \ge \ell_0$

Setze $\tau = \eta\cdot\delta$ und das entsprechende ℓ_0.

Es gibt nun "Säulen" deren Differenz größer ist als δ.

Deren "Anzahl" ist klein: zerlege Q in zwei Teile:

in einem Teil ist die Differenz zwischen O und U je kleiner als δ, im anderen $\ge \delta$. $Q = Q^{<\delta} \cup Q^{\ge\delta}$



$$|Q^{\ge\delta}|\cdot\delta \le \eta\cdot\delta \Rightarrow |Q^{\ge\delta}| \le \eta$$

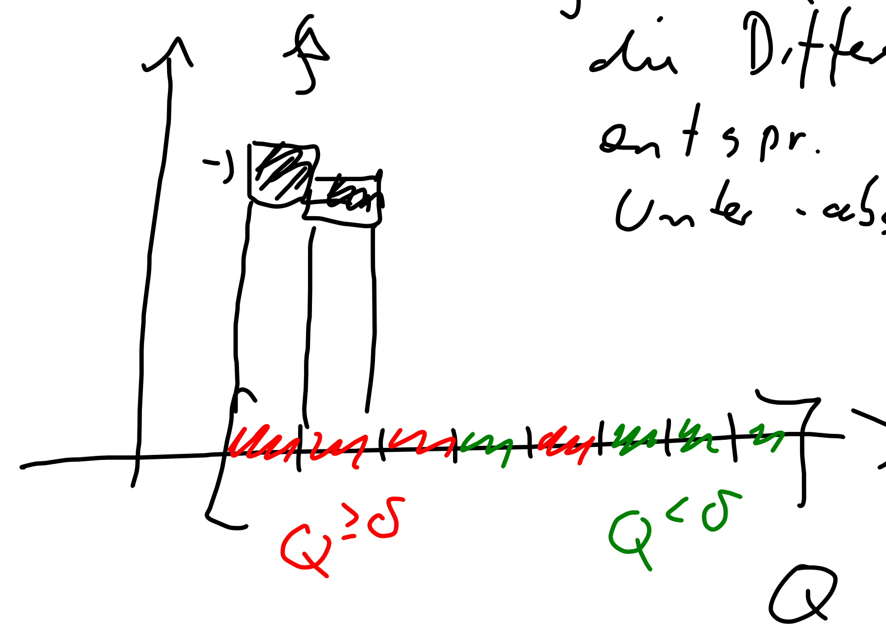
$$\Delta\!\!\!\int_{Q} g\circ f(\vec{x})\,dx = \Delta\!\!\!\int_{Q^{\geq\delta}} g\circ f(\vec{x})\,dx + \Delta\!\!\!\int_{Q^{<\delta}} g\circ f(\vec{x})\,dx$$

$$\Delta\!\!\!\int_{Q^{\geq\delta}} g\circ f(\vec{x})\,dx \leq |Q^{\geq\delta}| \cdot \sup\{g\circ f(\vec{x}) : \vec{x}\in Q\}$$
$$\geq |Q^{\geq\delta}| \cdot \inf\{\ \dots\ \}$$

Da f beschränkt und g stetig ist $g\circ f$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists\, C \text{ mit } \left|\Delta\!\!\!\int_{Q^{\geq\delta}} g\circ f(\vec{x})\,d^n x\right| \leq C\cdot\eta$$

$\Delta\!\!\!\int$ bezeichnet hier die Differenzen der entspr. Ober- und Unter-abschätzung.



$$\Delta\!\!\!\int_{Q^{<\delta}} g\circ f(\vec{x})\,dx \leq \eta\cdot|Q|$$

Wähle $\eta = \dfrac{\varepsilon}{|Q| + C}$ $\square$

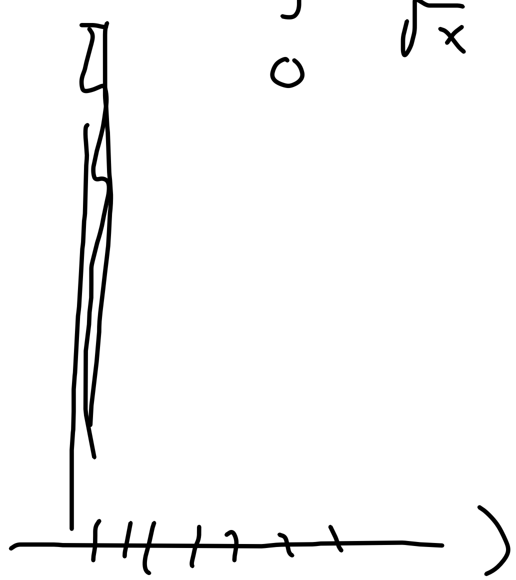
Uneigentliche Integration

Bisher hatten wir die Integration so definiert, dass f und D bzw Q je beschränkt sein müssen.

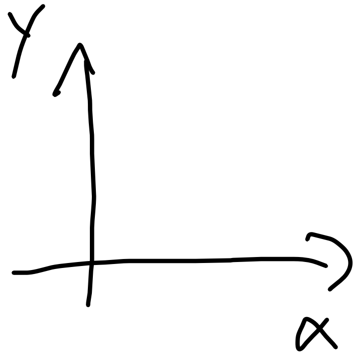
Für beide Fälle wollen wir den Integrationsbegriff erweitern

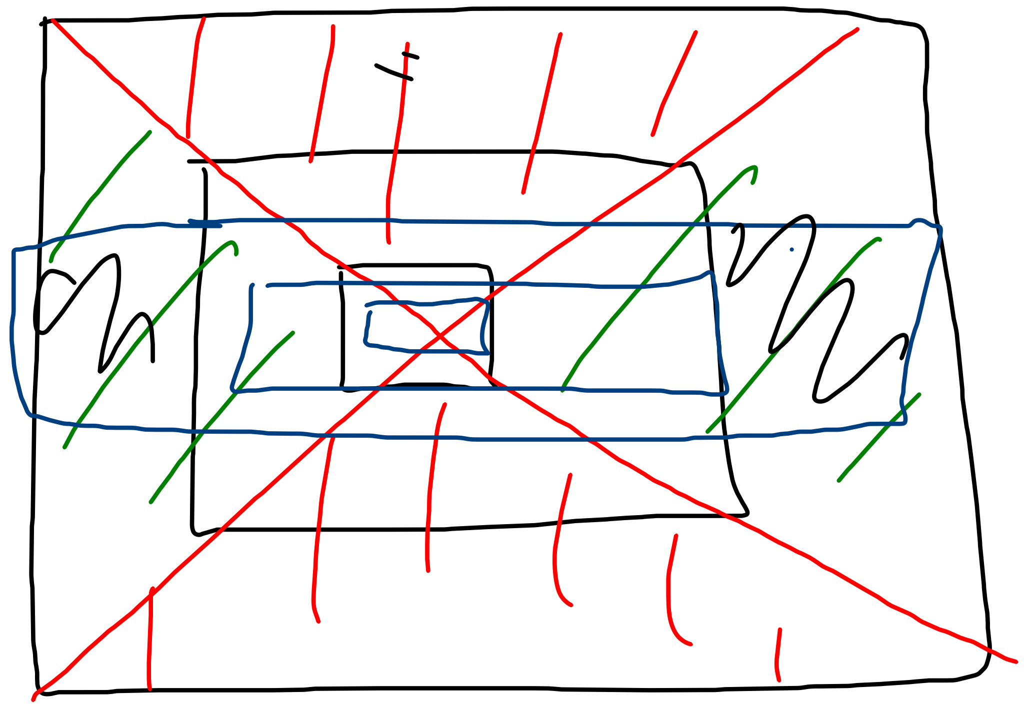
Erinnerung Ana I: $$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,dx$$

oder: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



$$\int_{\mathbb{R}^2}$$





<u>Definition</u>: $$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, d^n x := \lim_{k\to\infty} \int_{Q_k} f(\vec{x})\, d^n x .$$

für $f \geq 0$ und eine aufsteigende Folge von Quadern

$Q_k \supset Q_j$ falls $k \geq j$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k = \mathbb{R}^n$.

Für allgemeines D definieren wir

$$\int_D f(\vec{x})\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_D(\vec{x}) f(\vec{x})\, d^n x$$