Termin-ID: NTIwODEw

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 18.10.21

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

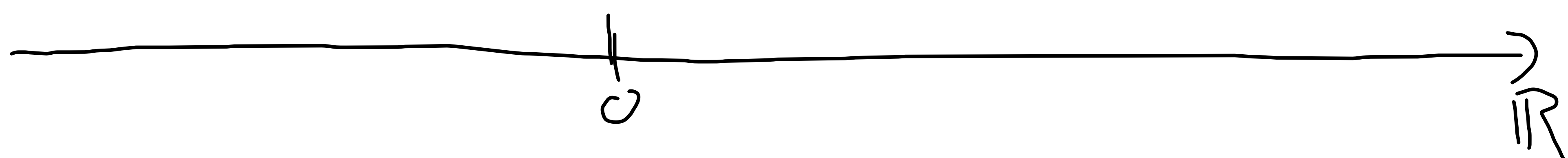
Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Analysis II

<ins>Analysis</ins>: Unendlichkeiten begreifbar machen.

erste Schritte: Eudoxos. Thema: Kontinuum



Eudoxos: 4 Strecken a, b, c, d

$$a : b = c : d$$

$:\Leftrightarrow$ Sein $\underline{n, m \in \mathbb{N}}$ dann impliziert

$$na > mb \Rightarrow nc > md$$
$$(na = mb \Rightarrow nc = md)$$
$$na < mb \Rightarrow nc < md$$

Moderne Mathematik: Folgen : $\mathbb{N} \to M$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$$

$$(\text{Analysis I}: \quad M = \mathbb{R})$$

Analysis II: Wir werden M verallgemeinern, insbesondere auf $\mathbb{R}$-VR.
($\mathbb{C}$-VR.)

Zentrale Eigenschaft in Analysis 1 war die Konvergenz.

(Wh.) Def.: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad |a_k - a| < \varepsilon \qquad k \geq n$$

Alles was man für eine Verallgemeinerung benötigt ist ein geeigneter Abstandsbegriff.

(Wh): Def. (Metrik): Sei M eine Menge. Eine Abb. $d: M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Metrik $:\Leftrightarrow$

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

b) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Δ-Ungleichung)

<u>Definition</u>: Sei M ein metrischer Raum, d.h. eine Menge auf der eine Metrik d definiert ist.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge, $a \in M$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right)$

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : d(a_k, a) < \varepsilon \quad \forall k \geq n.$

<u>Bemerkung</u>: Die Konvergenzeigenschaft hängt vom Abstandsbegriff ab! Wenn man zwei unterschiedliche Metriken d_1 und d_2 hat kann es sein, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl d_1 konvergiert, bzgl d_2 aber nicht! Wenn wir über Konvergenz / nicht-Konvergenz einer Folge sprechen, müssen wir dazu sagen, welcher Abstandsbegriff gemeint ist.

(In endlich dim. VR wird das schöner, siehe später)

Satz: (ooo) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

(Annahme: M ist VR, d.h. $a_n + b_n$ ist definiert)
"$d = \|\cdot\|$"

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_k, a) < \delta \ \forall k \geq n_0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall \eta > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : d(b_k, b) < \eta \ \forall k \geq n_1$

$d(a_k + b_k, a + b) = \| a_k + b_k - (a+b) \|$

Wir nehmen hier an, dass d aus einer Norm kommt.

($\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$

a) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

b) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

c) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$d(a, b) = \| a - b \|$

$$d(a_k + b_k, a+b) = \|a_k + b_k - a - b\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| \leq \delta + \eta$$

Falls $k \geq \max\{n_0, n_1\}$

Wähle $\delta = \eta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(a_k + b_k ; a+b) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n$

$(n = \max\{n_0, n_1\})$