Termin-ID: NTIwODIx

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 19.10.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Beispiel: Sei M eine Menge. $d: M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben

durch: $d(x,y) = 0$ falls $x = y$

$d(x,y) = 1$ falls $x \neq y$

Δ-Ungl: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$?

Betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (bzgl. d.)

$\Rightarrow$ irgendwann bleibt a_n konstant, d.h.

$\exists n \in \mathbb{N}: a_k = a \quad \forall k \geq n$

Wähle $M = \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{n}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$ (bzgl $|\cdot|$) $\boxed{\lim_{n\to} a_n \text{ ex. nicht}}$ bzgl d.

Bemerkung: Wir werden uns in dieser Vorlesung ab sofort Abstandsbegriffe wählen, die von einer Norm herrühren.

$d(x,y) = \|x-y\|$

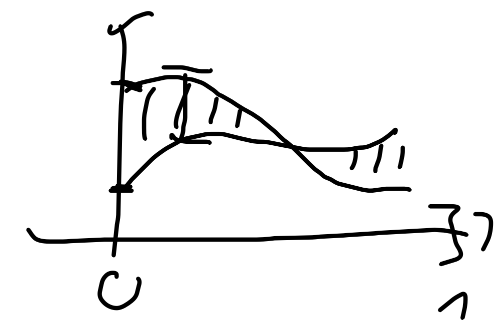
Beispiel: Sei S die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Diese Menge ist ein VR.

Betrachte: $\|\cdot\|_1 : S \to \mathbb{R}_0^+$

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

$$\|\cdot\|_\infty : S \to \mathbb{R}_0^+$$

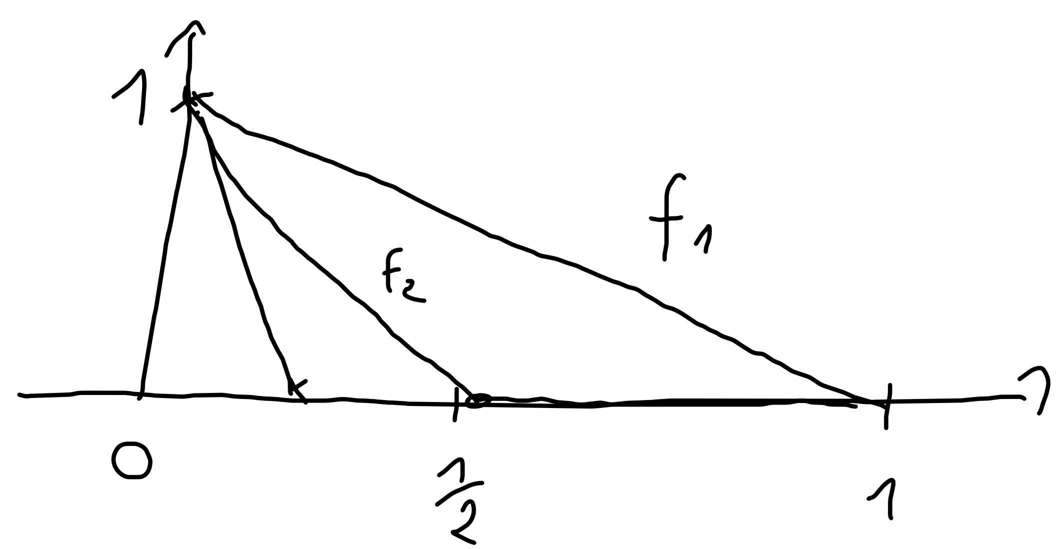
$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\} = \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$$



$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$



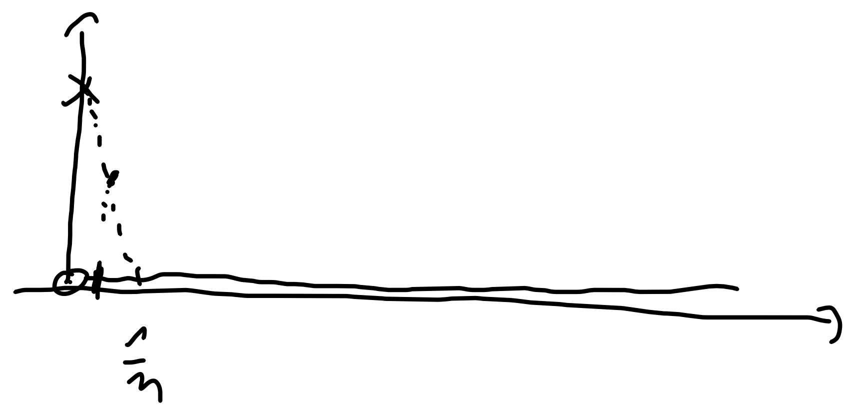
f_n startet bei $f_n(0) = 1$
fällt linear auf $f_n(\frac{1}{n}) = 0$
bleibt danach 0

$\lim_{n \to \infty} f_n$ bzgl d_∞ existiert nicht in S

bzgl d_1 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f = 0$

$$\int_0^1 |f_n - 0|\,dx = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Aber $\sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f_n(x)|\} = 1$ für alle n.



$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Selbst wenn man unstetige Fkt zulässt findet man bzgl d_∞ keinen Limes!

<u>Bemerkung</u>: Selbst wenn man sich auf Normen beschränkt ist der Abstandsbegriff unter Umständen entscheidend ob Konvergenz gilt oder nicht.

Definition: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow$ $\exists\, c, K \in \mathbb{R}^+$ mit:

$$\|x\|_a \leq K \|x\|_b \quad \text{für alle } x \in V$$

$$\|x\|_a \geq c \|x\|_b \quad \text{für alle } x \in V$$

Satz: Das ist in der Tat eine Äquivalenzrelation.

Beweis: a) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ klar.

b) $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b \Rightarrow \|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_a$

$$\|x\|_a \leq K \|x\|_b \Rightarrow \frac{1}{K} \|x\|_a \leq \|x\|_b$$

$$\ldots \qquad \Rightarrow \frac{1}{c} \|x\|_a \geq \|x\|_b$$

c) $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$ und $\|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_c \Rightarrow \|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_c$

$\|x\|_a \leq K \|x\|_b$ und $\|x\|_b \leq \tilde{K} \|x\|_c \Rightarrow \|x\|_a \leq K \tilde{K} \|x\|_c$

...

Satz: Falls V endliche Dimension hat sind <u>alle</u> Normen auf V zueinander äquivalent!

<u>Konsequenz</u>: Für zwei äquivalente Normen ist die Entscheidung ob eine Folge konvergiert oder nicht immer die gleiche!

$\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$

Annahme: bzgl $\|\cdot\|_a$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \|x_k - x\|_a < \varepsilon \quad \forall k \geq n$

gilt $\forall \eta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \|x_k - x\|_b < \eta \quad \forall k \geq m$?

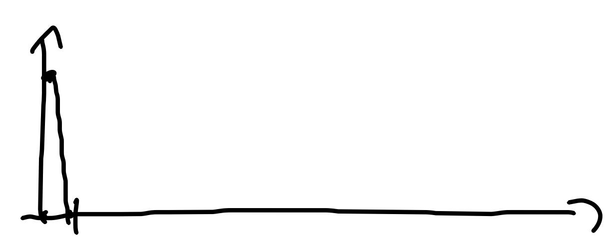
$$\|x_k - x\|_b \leq \frac{1}{c} \|x_k - x\|_a \leq \frac{\varepsilon}{c}$$

wähle $\varepsilon = c \cdot \eta$ ✓

$(m^{\eta} = n^{c \cdot \eta})$

Im endlich dimensionalen gilt, dass die Konvergenzeigenschaft in diesem Sinne absolut ist, d.h. man muss nicht die entsprechende Norm nennen.

<u>Folgerung</u>: $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$



<u>Ausblick</u>: Wir zeigen nun, dass für endlich dimensionale VR jede Norm äquivalent ist zu $\|\cdot\|_1$:

Sei V VR, $B = \{e_1, \ldots e_n\}$ eine Basis.

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{wobei} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

Stetigkeit

<u>Def</u>: Sei $f : M \to N$. f heißt stetig im Punkt $x \in M$ bzgl der Metriken d_M, d_N :$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{falls} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$
$$(d_N) \qquad\qquad (d_M$$

$$\left(\text{anders: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right)$$

Alternativ: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass:

$$d_M(x_n, x) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$$

Bsp: a) $f(x) = x$ ist immer stetig.
falls man je den selben
Abstandsbegriff verwendet.

b) $f(x) = A\,x$ wobei $x \in \mathbb{R}^n$
$A \in M(n \times n)$
ist immer stetig.

c) $f(x,y) = x^2 \cdot y$ ist stetig.
$x, y \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Satz: Sei V ein endlich dimensionaler VR. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+_0$
eine beliebige Norm. Dann ist $\|\cdot\|$ stetig bzgl $\|\cdot\|_1$

Beweis: Sei $f(x) = \|x\|$.

1. Schritt: Formel: $\exists\, K \in \mathbb{R}^+$ so dass

$$\|x\| \le K \|x\|_1$$

$$\|x\| = \Big\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Big\| \le \sum_{j=1}^{n} \|x_j e_j\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \|e_j\| = (*)$$

Wähle $K = \max_{j \in \{1,..n\}} \{ \|e_j\| \}$

$\Rightarrow$ $(*)$ $\cancel{\leq} = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot K = K \|x\|_1$

2. Schritt: Beweis der Stetigkeit. (~~Ma~~ f_a)