Übungen zu Analysis 2
(Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 2

Aufgabe 1: Es seien V, W endlich dimensionale Vektorräume mit Normen $||\cdot||_V$ bzw. $||\cdot||_W$. Es sei $f\colon V \to W$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender alternativer Definitionen von Stetigkeit:

a) $\forall x \in V\, \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0$ so dass $\forall y \in V\colon ||x-y||_V < \delta \Rightarrow ||f(x)-f(y)||_W < \epsilon$.

b) $\forall x \in V\, \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty} ||a_n - x|| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f(a_n) - f(x)||_W = 0$.

c) $\forall U \subset W\colon$ U ist offen bezüglich $||\cdot||_W \Rightarrow f^{-1}(U)$ ist offen bezüglich $||\cdot||_V$.

Bemerkung: Die Äquivalenz der beiden ersten Aussagen wurde bereits auf Übungsblatt 1 bewiesen und darf als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 2:

a) Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $||\cdot||_{.}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm ist. Dabei seien $x \in \mathbb{R}^n$, x_j für $j = 1, \dots, n$ die Komponenten von x sowie $|\cdot|$ der Betrag einer reellen Zahl.

1. $||x||_a := \sup\limits_{1\le j\le n} |x_j|$
2. $||x||_b := \sum_{j=1}^n |x_j|$
3. $||x||_c := \sum_{j=1}^n (x_j)^2$

b) Sei $n = 2$. Zeichnen Sie die Einheitskreise $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_{.} = 1\}$ derjenigen Abbildungen aus a), die eine Norm sind. Veranschaulichen Sie graphisch, dass jeweils ein Ball $B_0(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_{.} < r\}$ bezüglich der einen Norm in denjenigen der anderen passt, sowie umgekehrt.

Bemerkung: Damit haben Sie die Äquivalenz dieser Normen auf $\mathbb{R}^2$ graphisch gezeigt. Sie wird noch allgemeiner in der Vorlesung bewiesen.

Aufgabe 3: Sei X eine Menge. Die *diskrete Metrik* d auf X wurde in der Vorlesung definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für alle } \ x, y \in X.$$

a) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall das Intervall $[0,1]$ zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

b) Laut dem Satz von Bolzano-Weierstraß gilt "kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt". Was ist hier anders, sodass diese Aussage nicht gilt?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie Rand, Inneres und Abschluss der folgenden Teilmengen:

a) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$.

c) $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardmetrik $d \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+, d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ von $\mathbb{R}^3$.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 03.11.2021, um 14.00 Uhr.