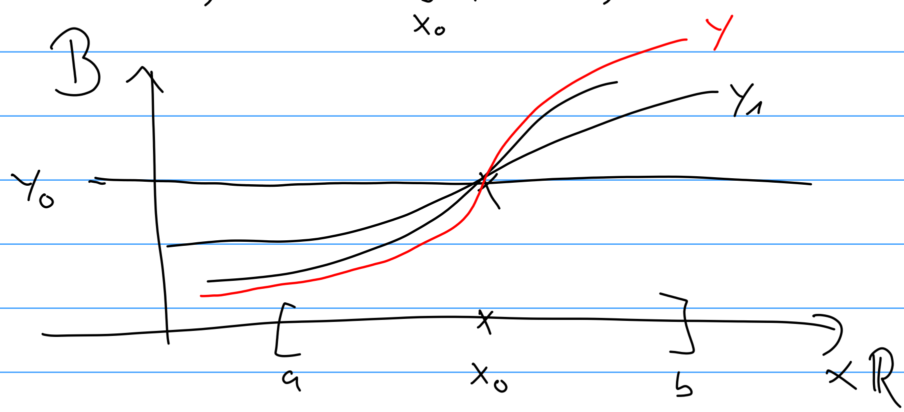
$y' = f(x,y)$ wobei f stetig und global Lipschitz in der zweiten Variablen

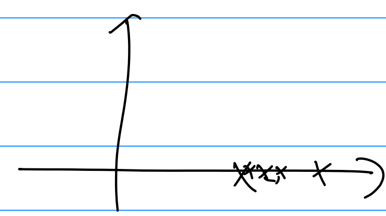
$y : [a,b] \to B \qquad f : [a,b] \times B \to B.$

Mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach: $\exists !$ lokale Lösung.

$$T(y) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$



AB: $y(x_0) = y_0$



$y_0, \quad T(y_0) = y_1, \quad T(y_1) = y_2 \quad \dots$

Picard-iteration.

$\mathcal{C} : \{ f : [a,b] \to B \ (\mathbb{R}), \text{ stetig} \}$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banach-Raum.

$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

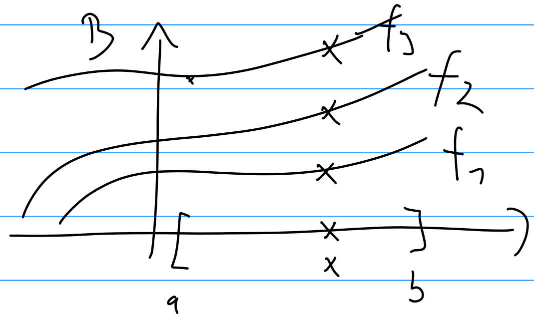
Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{C}$ in der Tat ein Banachraum ist. Die Vektorraumeig. ist relativ offensichtlich.

Es bleibt zu zeigen
1) Eine Cauchy Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ hat einen Limes f (in Bezug auf $\|\cdot\|_\infty$)
2) Dieses f ist in der Tat stetig, dadurch in $\mathcal{C}$.

Das bedeutet, dass $\mathcal{C}$ bzgl $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist.

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} \{ \|f(x)\| \} \qquad \|\cdot\|$ die Norm in B.

zu 1) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ eine Cauchy-Folge.



$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass:

$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

d.h. $\sup\limits_{x\in[a,b]} \{ \|f_n(x) - f_m(x)\| \} < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$

Die Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch punktweise eine C.F

d.h. $\forall x \in [a,b] \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sup\limits_{y\in[a,b]} \{ \|f_n(y) - f_m(y)\| \} < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N$

Da B Banachraum, also vollständig, existiert der Limes.

$f: \; f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ sei dieser punktweise Limes.

Ist bzgl $\|\cdot\|_\infty$ f in der Tat der Limes der f_n?

z.z. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

d.h. $\sup\limits_{x\in[a,b]} \{ \|f_n(x) - f(x)\| \} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

Sei $\varepsilon > 0$.

Betrachte für beliebiges $x \in [a,b]$ die Differenz $\|f_n(x) - f(x)\|$ $\forall n \geq N$

Δ-Ungl. $\boxed{\|f_n(x) - f(x)\|} = \|f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)\| \leq$

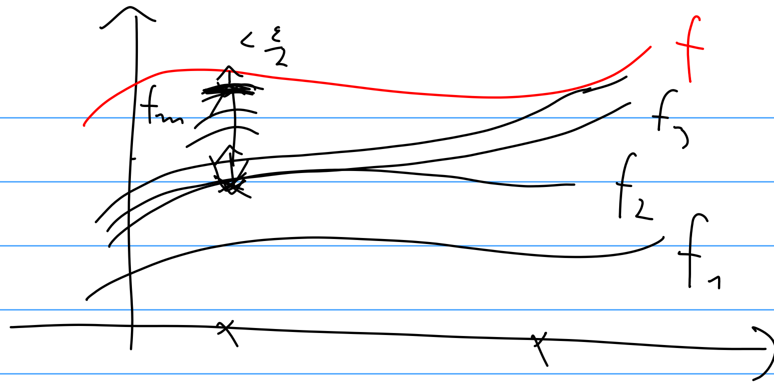
$\leq \underbrace{\|f_n(x) - f_m(x)\|}_{\text{Cauchy-Eigenschaft}} + \underbrace{\|f_m(x) - f(x)\|}_{\text{benutze punktweise Konvergenz}} < \boxed{\varepsilon} \quad \forall n \geq N$

Wähle N so, dass $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N$

diese Wahl ist unabhängig von x, da N so gewählt werden kann, dass $\sup\limits_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N$

wähle nun m so, dass $\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$

m hängt <u>von x</u> ab!!!



$\exists N: \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N$

zu 2) Wir hatten also eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die bzgl. der Supremumsnorm gegen f konvergiert.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} \{\|f_n(x)-f(x)\|\} = 0$ impliziert gleichmäßige Konvergenz.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \;\; \forall x \in [a,b]$

(Definition der gleichm. Konvergenz)

Wir haben also eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig konvergiert. All die f_n sind außerdem stetig $\Rightarrow$ f stetig.

Beweis: z.z.: f stetig.

dazu sei $x \in [a,b]$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

z.z. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Dazu $f(x_n) - f(x) = f(x_n) - f_m(x_n) + f_m(x_n) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)$

Δ-Ungl. $\|f(x_n) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f(x_n) - f_m(x_n)\|}_{\text{Konvergenz der } f_m} + \underbrace{\|f_m(x_n) - f_m(x)\|}_{\text{Stetigkeit}} + \underbrace{\|f_m(x) - f(x)\|}_{\text{Konvergenz der } f_m}$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ so das $\|f(y) - f_m(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall m \geq N$ $\forall y \in [a,b]$

insb, egal wie x_n, x aussieht : $\|f(x_n) - f_m(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Wir wählen also zunächst irgend so ein $m \geq N$.
Danach wählen wir $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ so dass $\|f_m(x_n) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq \tilde{N}$
das ist möglich, da wegen Stetigkeit von f_m und da nach Vorr. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ folgt : $\lim_{n \to \infty} \|f_m(x_n) - f_m(x)\| = 0$.

$\Rightarrow \|f(x_n) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{N}$ □

Lineare DGL. erster Ordnung!

$$y' = G(x) \cdot y + b(x)$$

$G : \mathbb{R} \to M(n \times n)$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Wir nehmen an, G und b stetig.

Falls $b(x) \equiv 0$ nennt man die DGL homogen.
sonst " " " " inhomogen.