Termin-ID: NTIwODM1

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 21.12.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

$$y' = G \cdot y + b \qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$y'(x) = G(x)\, y(x) + b(x) \qquad G: \mathbb{R} \to M(n \times n)$$

$$b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

lin. DGL. 1. Ordnung, falls $b(x) \equiv 0$ "homogene"

sonst inhomogene.

Wir nehmen an, dass $G(x)$ stetig ist und b stetig ist.

$\left(\underline{y} = \int G\underline{y} + b \, dx \right)$ Dann gelten die Voraussetzungen von Picard-Lindelöff:

$y' = f(x,y)$ hier: $f(x,y) = G(x) \cdot y + b(x)$

ist stetig und Lipschitz stetig "in y".

(genauer: global Lipschitz auf jedem abgeschl. Intervall)

$$\| f(x,y) - f(x,z) \| = \| G(x) \cdot (y-z) \| \le \underbrace{\sup_{i,j,x} |G_{ij}(x)|}_{L} \cdot \| y - z \|$$

Falls G, b stetig sind, dann haben wir für jede Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

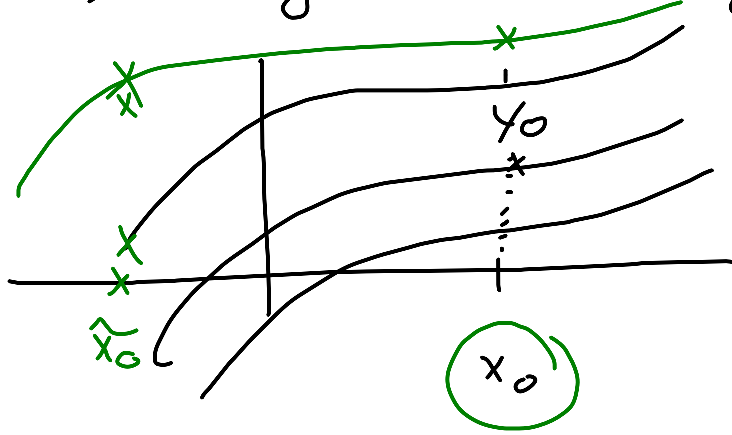
Satz: Falls man alle Lösungen der DGL zu beliebigen Anfangswerten betrachtet, erhält man einen Vektorraum der Dimension n. (im homogenen Fall, d.h. $b(x) \equiv 0$)

<u>Beweis</u>: Falls $y(x), z(x)$ Lösungen sind und $\alpha \in \mathbb{R}$ so gilt

$\alpha y(x) + z(x)$ ist auch eine Lösung:

$$\alpha y'(x) + z'(x) = G(x)\left(\alpha y(x) + z(x)\right) = \alpha G(x) y(x) + G(x) z(x) \checkmark$$

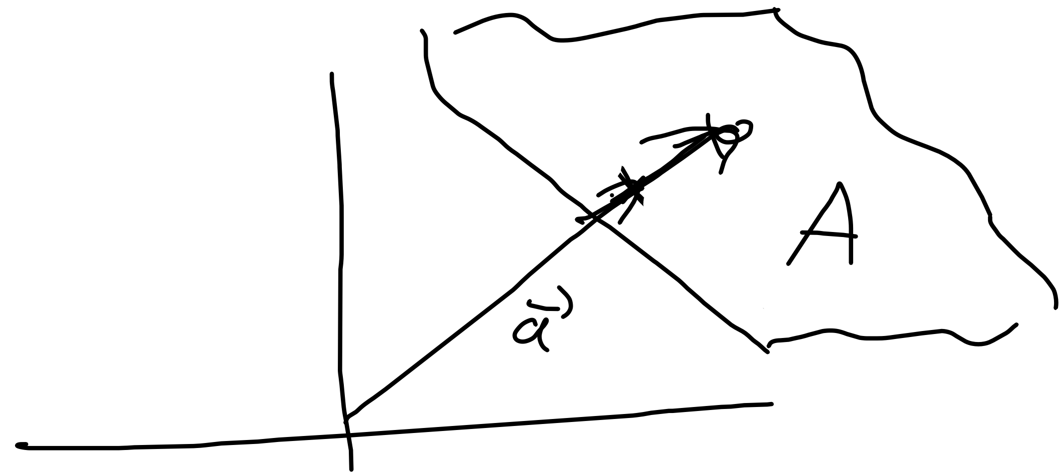
$\Rightarrow$ Menge der Lösungen ist ein VR!



Für festes x_0 haben wir für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung.

Variieren von x_0 bringt keine neuen Lösungen.

Bemerkung: Falls $b(x) \neq 0$ erhält man einen affinen Raum der Dimension n.



affin $\quad A - \vec{a} \to$ linear.

hier ist der entsprechende lineare Raum der Lösungsraum der homogenen Gleichung.

Reduktion linearer DGL höherer Ordnung

Beispiel: $y'' = -\omega^2 y$ ist lineare DGL 2. Ordnung

Definiere: $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \vec{v}$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\omega^2 y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = A\vec{v}$$

$\vec{v}\,' = A\vec{v}$ Dies ist eine DGL der Ordnung eins, der Lösungsraum ist zweidimensional.

Wir betrachten das System also auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$, da $\vec{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Allgemein: $y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}$

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \end{pmatrix} = A\vec{v}$$

Lösungsraum: n-dimensional

Die a_j dürfen hier von x abhängen!

zurück zum Bsp: $y'' = -\omega^2 y$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = A\vec{v}$$

Lösung: $\underbrace{e^{Ax}}_{\in M(n\times n)} \cdot \vec{v}(0)$ bzw. $e^{A(x-x_0)} \cdot \vec{v}_0$

für AB $\vec{v}(x_0) = \vec{v}_0$

Um e^{Ax} zu bestimmen wechseln wir in die Eigenbasis von A. (bzw. Jordan-Basis). Sei T die entsprechende Trafo,

so dass $TAT^{-1} = D$ diagonal ist.

Die Spalten von T^{-1} sind hier die EV von A!

Lösung: $e^{Ax} \cdot \vec{v}(0) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ax)^j}{j!} \right) \cdot \vec{v}(0) = T^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(TAT^{-1})^j x^j}{j!} \right) \cdot T\vec{v}(0)$

z.B. $j=3$: $\frac{x^3}{3!} \cancel{T}^{-1} \left(\cancel{T}A\cancel{T}^{-1}\cancel{T}A\cancel{T}^{-1}\cancel{T}A\cancel{T}^{-1} \right) \cancel{T}\vec{v}(0)$

$$e^{Ax}\vec{v}(0) = T^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j x^j}{j!} \right) T\vec{v}(0) = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} T\vec{v}(0)$$

wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\quad D^x = \begin{pmatrix} \lambda_1^x & 0 \\ 0 & \lambda_2^x \end{pmatrix}$, $\quad P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{char. Pol}: \quad \chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ -\omega^2 a \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \; ; \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \checkmark \right)$$

$$\lambda_1 = i\omega$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\omega$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad T^{-1} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = b$ (2.Z mal 1.S $= 0$)

$a + b = 1$ (1Z x 1.S $= 1$)

$2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = -d$

$i\omega c - i\omega d = 1$

$-i\omega d - i\omega d = 1$

$d = \frac{i}{2\omega}$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\omega} \\ 1 & \frac{i}{\omega} \end{pmatrix}$$

Lösung: $T^{-1}\begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & e^{x_2} \end{pmatrix} T =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/\omega \\ 1 & i/\omega \end{pmatrix} \vec{v}(0)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & e^{-i\omega x} \\ i\omega e^{i\omega x} & -i\omega e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i/\omega \\ 1 & i/\omega \end{pmatrix} \vec{v}(0) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega x} + e^{-i\omega x} & -\frac{i}{\omega} e^{i\omega x} + \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} \\ i\omega e^{i\omega x} - i\omega e^{-i\omega x} & e^{i\omega x} + e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \vec{v}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\frac{1}{\omega} \sin \omega x \\ \omega \sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix} \vec{v}(0) \qquad \square$$