Termin-ID: NTIwODE4

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

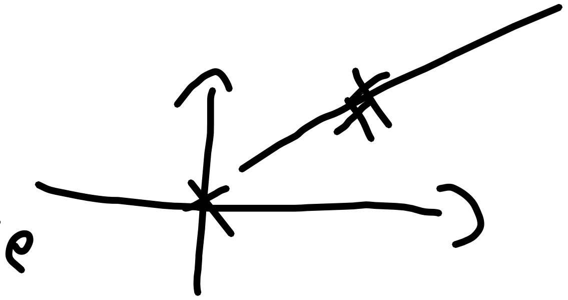
Datum: 22.11.21

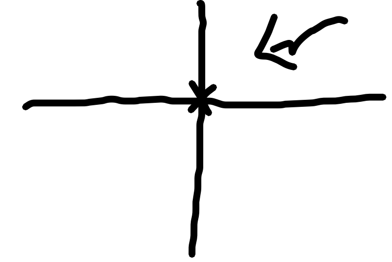
Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

f', Df





jede

total, partiell diffbar, in Richtung diffbar | (X)

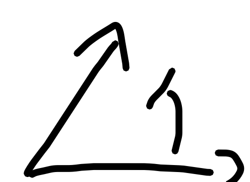
$\frac{d}{dx} f : U \to \mathbb{R}^n$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} f\right) : U \to \mathbb{R}^m$

Ableitung: f' **Matrix**, Zeilen sind partielle Ab!

Wir werden uns nun Ableitungsregeln herleiten (insb. Kettenregel)

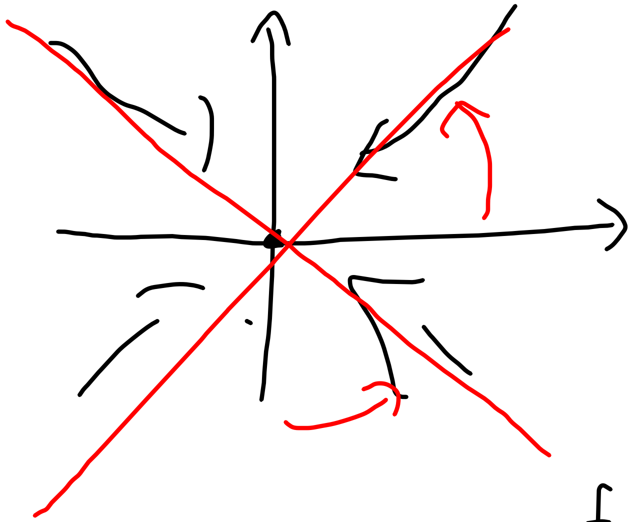
Bemerkung: Wir werden uns total diffbare Funktionen ansehen. Partielle diffbarkeit reicht in der Regel nicht aus für eine hilfreiche Ableitungsregel. Bsp: f, g



g sei Drehung um $45°$

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

total diffbar

f: 

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ \not\Downarrow & \text{sonst} \end{cases}$$

$f \circ g$ ist nicht part. diffbar bei 0

part. diffbar $\Leftarrow$ in jede Richtung diffbar $\Leftarrow$ total diffbar $\Leftarrow$ stetig partiell diffbar

$\not\Downarrow$

Satz: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ (verallgemeinerung auf $D \subset \mathbb{R}^\ell$ offen mit entspr. Bedingungen möglich)

g sei an der Stelle $a \in \mathbb{R}^\ell$ total diff.bar, f an der Stelle $g(a)$ ebenso

Dann ist $f \circ g$ an der Stelle a total diffbar.

Es gilt $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ (Matrixprodukt)

Beweis: z.z. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h}{\|h\|} = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{[f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot g'(a)h]}{\|h\|} \cdot \frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|g(a+h)-g(a)\|}$$

(wir nehmen an, dass $g(a+h) \neq g(a)$)

Da f total diffbar gilt $\forall\, k \to 0$:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot k}{\|k\|} = 0$$

Wähle $k = g(a+h) - g(a)$

da g bei a stetig gilt $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot(g(a+h)-g(a))}{\|g(a+h)-g(a)\|} = 0$$

Da g total diffbar existiert der Limes $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a) - g'(a)\cdot h}{\|h\|} = 0$

$\Rightarrow \frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|}$ ist also beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{[f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\,(g(a+h)-g(a))] \cdot \cancel{\|g(a+h)-g(a)\|}}{\|h\| \cdot \cancel{\|g(a+h)-g(a)\|}} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot(g(a+h)-g(a))}{\|h\|} = 0$$

$$g(a+h) - g(a) = g'(a)\cdot h + Rest \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{Rest}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h - \cancelto{0}{f'(g(a))\cdot Rest}}{\|h\|} = 0$$

Falls $g'(a) \neq 0$ kann man immer eine Umgebung von a finden, so dass $g(a+h) - g(a) \neq 0$ für $h \neq 0$

Falls $g'(a) = 0$

~~Dann~~ ~~So~~ Falls $g(a+h) - g(a) = 0$ folgt dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{\|h\|} = 0$$

Da die Zähler exakt 0.

$\Rightarrow$ Ableitung ist 0.

Bsp: a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir möchten $f(\cos x, \sin x)$ ableiten.

Setze $g(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \left(\frac{d}{dx} f, \frac{d}{dy} f\right)\Big|_{g(x)} \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx} f(g(x)) \cdot (-\sin x) + \frac{d}{dy} f(g(x)) \cdot \cos x .$$

b) Produktregel aus Ana I. z.z $(f\, g)' = f'g + f\, g'$

dazu $\quad G(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ $\quad F(x,y) = x \cdot y$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) \cdot g(x) = F \circ G(x)$$

$$(f\, g)' = \underbrace{(\cancel{A_n}\, g(x), f(x))}_{\frac{d}{dx} F(G(x))} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) \checkmark$$

c) Sein $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ total diffbar.

Wie sieht die Ableitung von $\langle f, g \rangle$ aus?

$\langle f, g \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} f_j(x) \cdot g_j(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \langle f, g \rangle = \ldots$

Oder Kettenregel. $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\ell}$, $G\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\ell} x_j y_j$

$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2\ell}$

$$F' = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{grad} f_2 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \ldots$$

(ähnlich wie Produktregel Ana I oben)

...

<u>Mehrfache Ableitungen</u>: Falls die partielle(n) Ableitung(en) in einer ganzen offenen Umgebung eines Punktes a existieren, kann man die entsprechende Ableitungsfunktion wieder auf Differenzierbarkeit untersuchen.

Neu im Vergleich zu An 1 ist sind Fragen zu gemischten Ableitungen.

<u>Bemerkung</u>: Falls $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell diffbar an der Stelle a, gilt im Allgemeinen <u>nicht</u> dass $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(a) = \frac{d}{dy}\frac{d}{dx} f(a)$!

Beispiel dazu: Hausaufgaben I/c II Nr. 5.

<u>Satz</u>: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-mal diffbar, die k-ten Ableitungen existieren im totalen Sinne. Hier sind alle Kombinationen gemeint (k-1 mal beliebig partiell, das Ergebnis sei dann total diffbar). Dann vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k.

Häufig findet man die schwächere Version des Satzes:

Sei f 2-mal stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ ...