Termin-ID: NTIwODI5

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 23.11.21

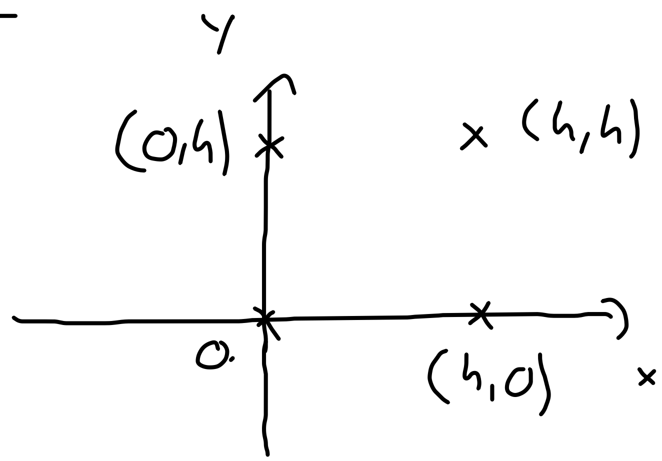
Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Satz (von Schwarz): Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$.
f sei in einer Umgebung von a $k-1$ mal partiell diffbar, und dies $k-1$.ten Ableitung in a total diffbar.
Dann vertauschen alle Ableitungen bis zum Grad k.

Beweis: Sei o.B.d.A $a = 0$, $k = 2$, $n = 2$



Betrachte: $T(h) = \frac{1}{h^2} \cdot \left(f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) \right)$

Definiere: $\varphi(x) := f(x,h) - f(x,0)$

Dann ist $T(h) = \frac{1}{h^2} \cdot \left(\varphi(h) - \varphi(0) \right)$

Wegen MWS $\exists\, \xi \in [0,h]$ so dass:

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot h$$

$$\Rightarrow T(h) = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{d}{dx} f(x,h) - \frac{d}{dx} f(x,0) \right)\Big|_{x=\xi} = \frac{1}{h} \left(\frac{d}{dx} f(\xi,h) - \frac{d}{dx} f(\xi,0) \right)$$

Da $\frac{d}{dx} f$ ist bei 0 total diffbar

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\frac{d}{dx} f(\vec{h}) - \frac{d}{dx} f(0) - \left(\frac{d}{dx} f\right)' \cdot h}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(h) = \frac{1}{h}\left(\frac{d}{dx} f(z,h) - \frac{d}{dx} f(0,0) + \frac{d}{dx} f(0,0) - \frac{d}{dx} f(z,0) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} T(h) = \frac{1}{h}\left(\left(\frac{d}{dx} f\right)' \cdot \begin{pmatrix} z \\ h \end{pmatrix} - \left(\frac{d}{dx} f\right)' \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

wähle $\vec{h}$ einmal $\vec{h} = \begin{pmatrix} z \\ h \end{pmatrix}$, einmal $\vec{h} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dx} f(z,h) - \frac{d}{dx} f(0,0) = \left(\frac{d}{dx} f\right)' \cdot \begin{pmatrix} z \\ h \end{pmatrix} + \text{Rest} \qquad \lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\text{Rest}}{\|h\|} = 0$$

Also $\lim_{h \to 0} T(h) = \lim_{h \to 0} \cancel{\frac{1}{h}} \left(\frac{d}{dx} f\right)' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{h} \end{pmatrix} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f\right)\Big|_{(0,0)} = \frac{d}{dy} \frac{d}{dx} f(0,0)$

Alles obige ist symmetrisch unter Vertauschung der Rolle von x und y

$\Rightarrow$ Ebenso erhält man $\lim_{h \to 0} T(h) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f(0,0)$ $\square$

$$A \cdot \vec{a} - A \cdot \vec{b} = A(\vec{a} - \vec{b})$$

Bemerkung: In der Literatur findet man häufig eine schwächere Version, nämlich k-mal partiell diffbar, die k. Ableitungen stetig.

Definition: Die Menge aller k-mal stetig partiell diffbaren Funktionen nennt man oft C^k.

Extrema

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, D offen.

Man sagt f hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (bzw $a \in D$) ein lokales Minimum $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ so dass $f(x) \geq f(a)$ $\forall x$ mit $\|x-a\|_2 < \varepsilon$

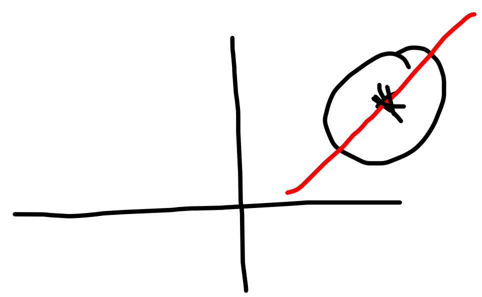
(striktes Minimum falls $f(x) > f(a)$ für $x \neq a$))

Maximum und striktes Maximum analog.

Bemerkung: a ist hier ein innerer Punkt. Später werden wir uns Randpunkte ansehen.

Satz: Falls $a \in D$ innerer Punkt der Definitionsmenge ist und $f: D \to \mathbb{R}$ dort ein Max oder Min hat folgt: $f'(a)=0$. ($Df=0$, alle part. Abl. sind Null) vorausgesetzt, f' existiert.

Beweis: Falls f bei a ein Maximum hat hat auch f eingeschränkt auf eine Gerade durch f ein Extremum.



Sei $\varphi(t) = f(\vec{a} + t \cdot \vec{r}) \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw $I \to \mathbb{R}$

Aus Ana I wissen wir: $\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{f'(a) \cdot \vec{r}}_{\text{Richtungsabl.}} = 0 \qquad \Rightarrow f'(a) = 0$$

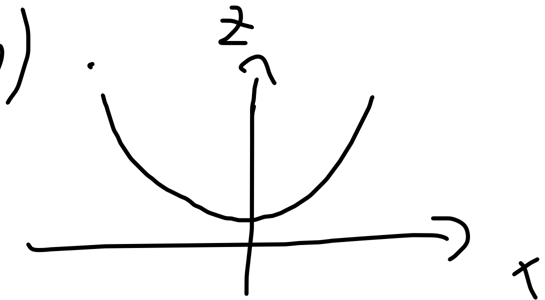
Bezeichnung: Die Stellen, an denen f' Null ist nennt man kritische Punkte. Für diff'bare Funktionen sind sie notwendiges Kriterium für lokale Extrema.

Bsp: $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Wo sind kritische Punkte?

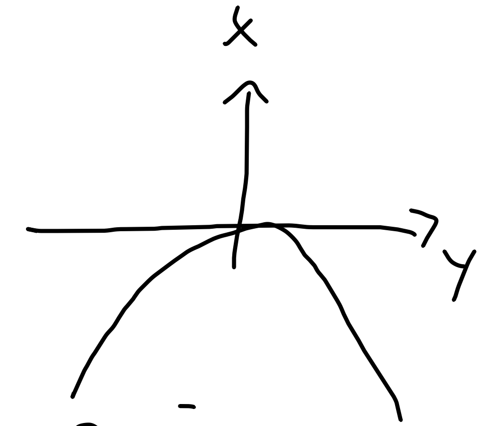
$\frac{d}{dx} f(x,y) = 2x \qquad \frac{d}{dy} f(x,y) = -2y$

$\Rightarrow$ einzige krit. Punkt ist $(0,0)$.



Zu $x \to$ Richtung für $y = 0$

$y \to$ Richtung für $x = 0$



Man hat weder Max noch Min.

Sondern einen Sattelpunkt, d.h. in mind. eine Richtung ist es ein striktes Max, in mind. eine andere ein striktes Min.

$\varphi(t) = f(t,0) \qquad \eta(t) = f(0,t)$

lok. Max bei $t=0$ $\qquad$ lok. Min bei $t=0$

Definition: Sei $A \in M(n \times n)$. A heißt

a) positiv definit $:\Leftrightarrow \langle v, Av \rangle > 0 \quad \forall \|v\|_2 = 1$

b) positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \langle v, Av \rangle \geq 0 \quad \forall \|v\|_2 = 1$

c) negativ definit $:\Leftrightarrow$ ...... < 0 ....

d) negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ .... ≤ 0 ....

e) indefinit sonst.

Man fordert bei b) und d) häufig auch, dass $\|v\|_2 = 1$ existiert mit $\langle v, Av \rangle = 0$.

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diffbar bei a, dann nennt man die Matrix $H_f(a)$ gegeben durch $(H_f(a))_{ij} = \frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_j} f(a)$ die Hessematrix von f. Sie ist symmetrisch.

(Satz von Schwarz)

Satz: Sei a ein kritischer Punkt von $f \in C^2$.

Dann gilt: $H_f(a)$ positiv definit $\Rightarrow$ a ist striktes Min von f

$H_f(a)$ negativ definit $\Rightarrow$ a ist striktes Max von f.

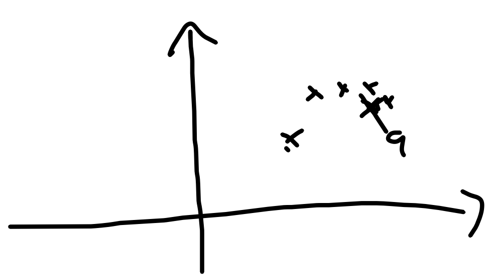
Achtung: $H_f(a)$ pos. semidefinit $\cancel{\Rightarrow}$ a ist Max gilt <u>nicht</u>

Bsp: $f(x,y) = x^2 - y^4$

Beweis: (indirekt) von $H_f(a)$ pos. def $\Rightarrow$ Min.

WA: $\vec{a}$ sei kein lokales Min. $\Rightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \vec{x}$ mit $\|\vec{a} - \vec{x}\|_2 < \varepsilon$ so dass $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$



Setzen $\vec{r} = \frac{\vec{x}}{|x|}$ betrachte

$\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{r})$

Wenn f kein lok. Min $\Rightarrow$ $\varphi(t)$ hat für eine Richtung $\vec{r}$ kein lokales Minimum.

$$\frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{da } a \text{ kritischer Punkt}$$

$$\frac{d^2}{(dt)^2} f(t) \Big|_{t=0} \leq 0 \quad \text{da WA kein Min für eine Richtung } \vec{r}.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(f'(\vec{a} + t\vec{r}) \cdot \vec{r} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} f(\vec{a} + t\vec{r}) \cdot r_j$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_\ell} \frac{d}{dx_j} f(\vec{a} + t\vec{r}) \cdot r_j \cdot r_\ell \Big|_{t=0}$$

$$= \langle \vec{r}, H_f(a) \cdot \vec{r} \rangle > 0 \quad \lightning$$

Wie findet man heraus, ob eine Matrix pos. oder negativ definit ist?

Hier haben wir den Vorteil, dass die zu untersuchende Matrix symmetrisch und dadurch diagonalisierbar ist.

positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EW sind positiv

negativ " " " " " negativ.

Im $\mathbb{R}^2$ reicht es, det und spur anzusehen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{spur} > 0 \text{ und } \det > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$$