Termin-ID: NTIwODE2

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 24.01.22

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Def.: $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Quader $Q_{n+1} \supset Q_n$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \mathbb{R}^d \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right).$$

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ ist uneig. integrierbar $:\Longleftrightarrow$

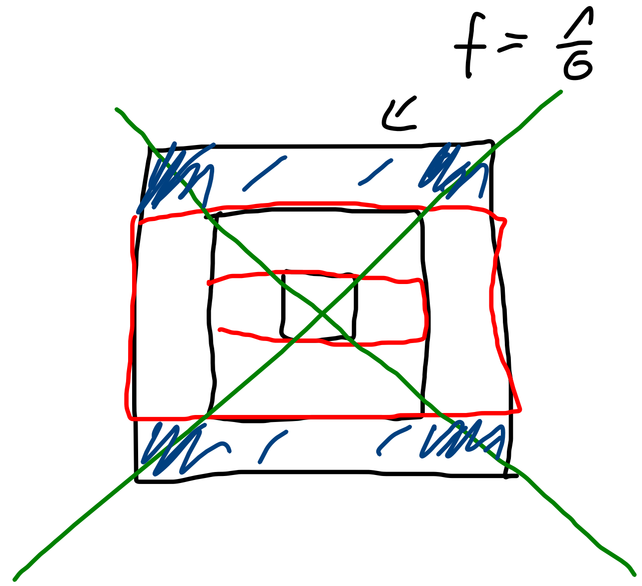
$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ existiert im eigentlichen Sinne:

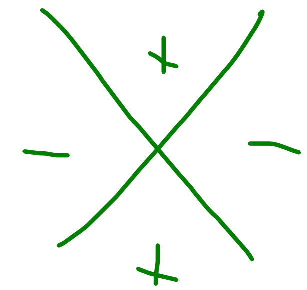
Falls $\int_{\mathbb{R}^d} f^{\pm}(\vec{x})\, d^d x$ $\in \mathbb{R}$ im eig. Sinne existieren, dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x})\, d^d x = \int f^+ + \int f^- .$$

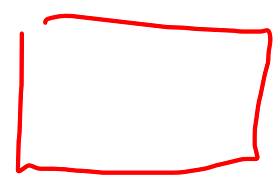
Bemerkung: Die Einschränkung auf nicht negative (nicht-positive) Funktionen hat den Vorteil, dass $\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x})\, d^d x$ nicht von der Wahl der Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt!

Falls f allgemein gewählt wird, kann der Limes von der Wahl von $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängen.





$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x = 0$$



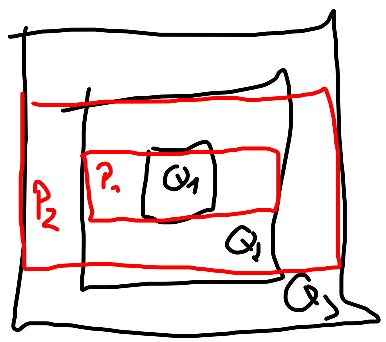
Man kann f so wählen, dass $\int f(\vec{x})\, d^d x = 1$

<u>Bemerkung</u>: Damit $\int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ existiert reicht dass $\int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ beschränkt bleiben, da $i_n := \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ monoton ist, (falls f nicht-negativ oder nicht positiv)

Beweis (der Unabhängigkeit von der Wahl der Quader)

Seien $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigende Folgen von Quadern. Wir wollen zeigen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x = \lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(\vec{x})\, d^d x \quad \text{falls } \lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} P_n \left(= \mathbb{R}^d\right)$$



$$Q_2 \subset P_2 \subset Q_3$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$P_n \subset Q_m$, da jede Ecke von P_n irgendwann in einem Q_j enthalten ist. Es gibt endlich viele Ecken $\Rightarrow$ Behauptung.

Wegen Monotonie gilt (hier $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$):

$$\int_{P_n} f(\vec{x})\, d^d x \leq \int_{Q_m} f(\vec{x})\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(\vec{x})\, d^d x$$

d.h. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{P_n} f(\vec{x})\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(\vec{x})\, d^d x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(\vec{x})\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(\vec{x})\, d^d x$$

Man kann oben einfach die Rolle von P und Q vertauschen und erhält analog $\lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(\vec{x})\, d^d x \geq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(\vec{x})\, d^d x \Rightarrow$ "="

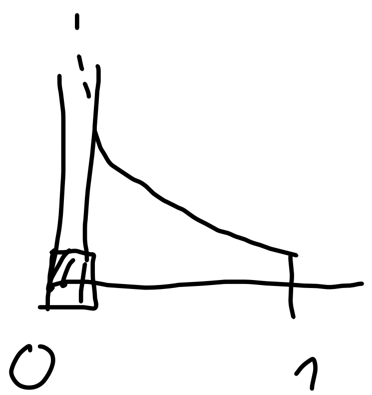
Dieses Argument gilt auch für uneigentliche Limiten, d.h. wenn man $\lim_{n\to\infty} \ldots = \infty$ zulässt. Die Frage, ob $\lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ existiert hängt also auch nicht von der Wahl der Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

$$\int_D f(\vec{x})\, d^d x = \int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_D(\vec{x}) f(\vec{x})\, d^d x$$

Ein weiteres Problem für Integrierbarkeit besteht, falls f auf D unbeschränkt ist. Das war schon in Ana 1 so:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ist im eigentl. Sinne nicht definiert

$$\left(U < \infty \quad \text{aber} \quad O = +\infty \right)$$



$$O(n) = +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

uneigentl. Integral

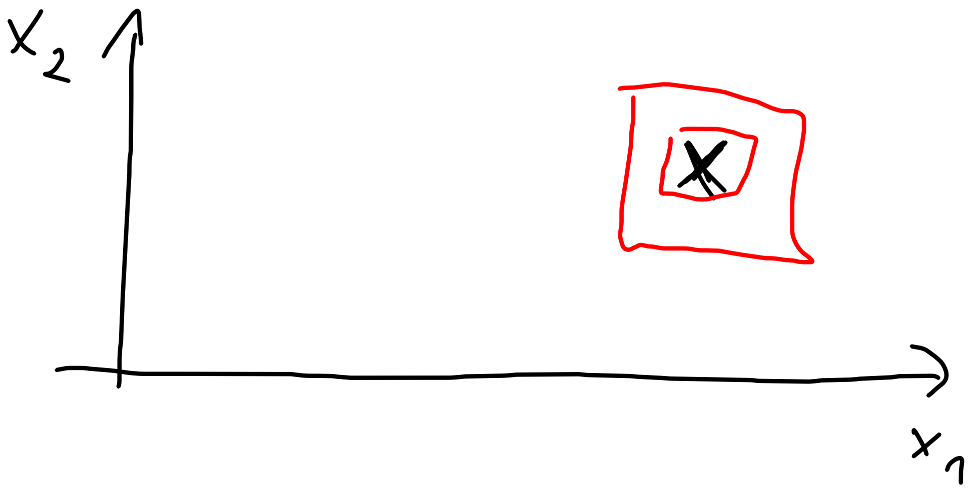
Lösung: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2 - 2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

Anderes Bsp: $$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Man schneidet also so, dass man $\forall\, \varepsilon > 0$ eine beschränkte Fkt erhält.

Ähnlich gehen wir bei Funktionen mehrerer Variablen vor:



<u>Definition</u>: Sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Quadern; $f: D \to \mathbb{R}_0^+$. $(Q_{n+1} \subset Q_n)$. Wir definieren das uneigentliche Integral

$$\int_D f(\vec{x})\, d^d x := \lim_{n\to\infty} \int_{D\setminus Q_n} f(\vec{x})\, d^d x .$$

Wir benötigen dazu $D \cap \lim_{n\to\infty} Q_n = \emptyset$ $\left(\lim_{n\to\infty} Q_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \right)$.

Wie oben definiert man das uneigentliche Integral für allg. f durch $\int f = \int f^+ + \int f^-$.

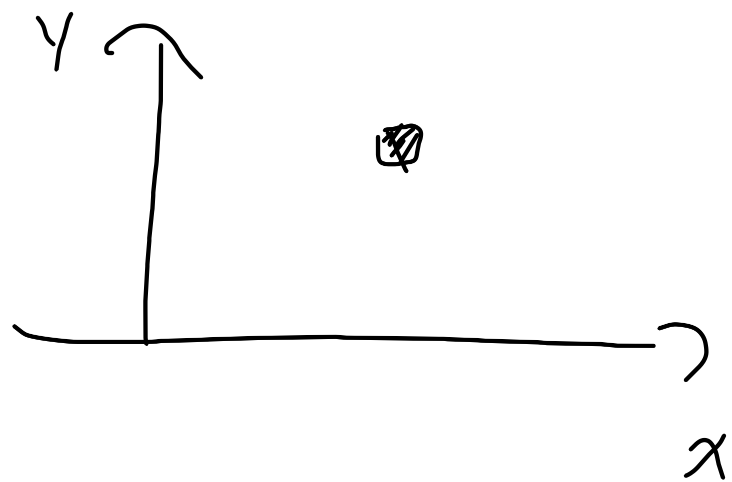
Bemerkung: Der Satz von Fubini lässt sich auf uneigentliche Integrale erweitern. Falls z.B. f unbeschränkt ist:

Wähle Q_n so, dass $\int_D f(\vec{x})\, d^d x - \int_{D\setminus Q_n} f(\vec{x})\, d^d x < \varepsilon$

(für $f: D \to \mathbb{R}_0^+$).

Für $\int_{D\setminus Q_n} f(\vec{x})\, d^d x$ benutze Fubini, danach bilde $\lim_{\varepsilon \to 0} \ldots$

Unser Beispiel $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ist "um die 0" nicht integrierbar, auch nicht im hier behandelten uneigentlichen Sinne.



Transformationssatz

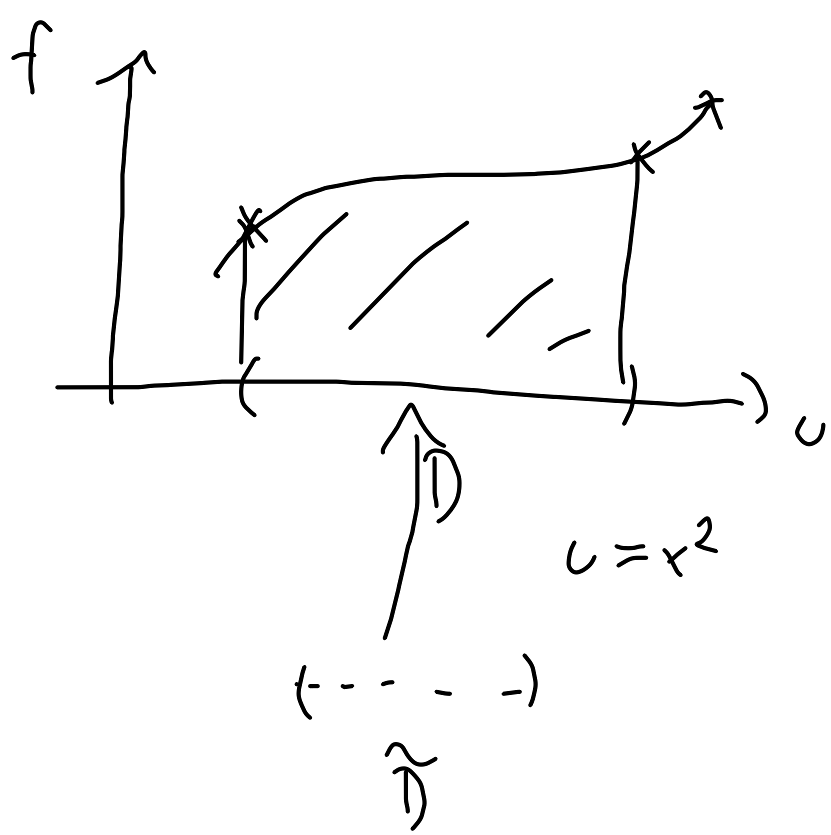
In der Ana I gab es die Substitutionsregel:

z. B. $\int_0^\infty 2x\, e^{-x^2}\, dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x, \quad 2x\, dx = du$

$= \int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$



Definition: Eine Abbildung $\Phi: D \to W$ mit $D, W \subset \mathbb{R}^d$ offen, heißt Diffeomorphismus, $:\Leftrightarrow$ Φ bijektiv und sowohl Φ, als auch Φ^{-1} stetig diffbar.