Termin-ID: NTIwODI1

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 25.01.22

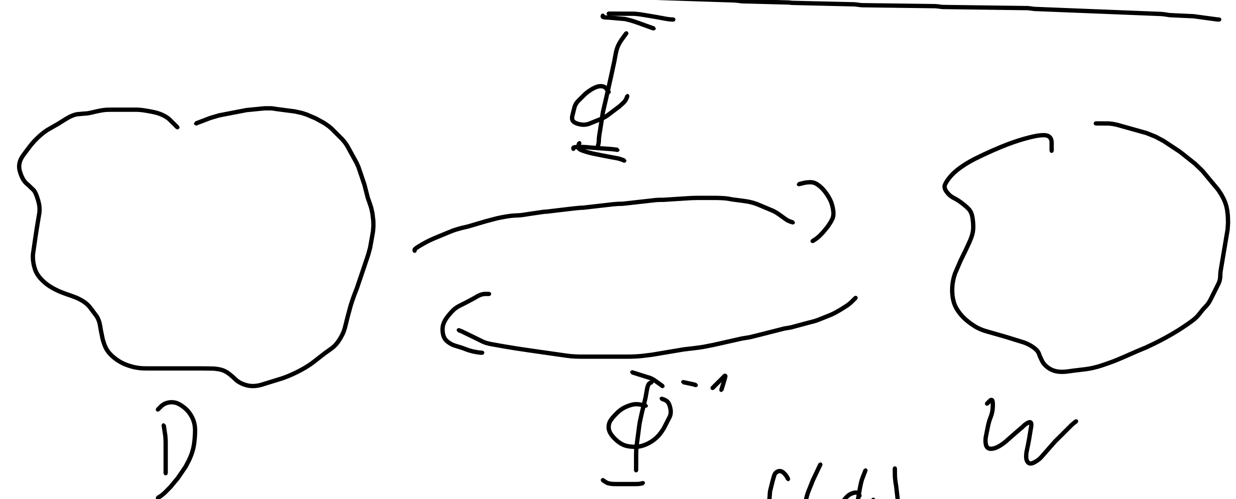
Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

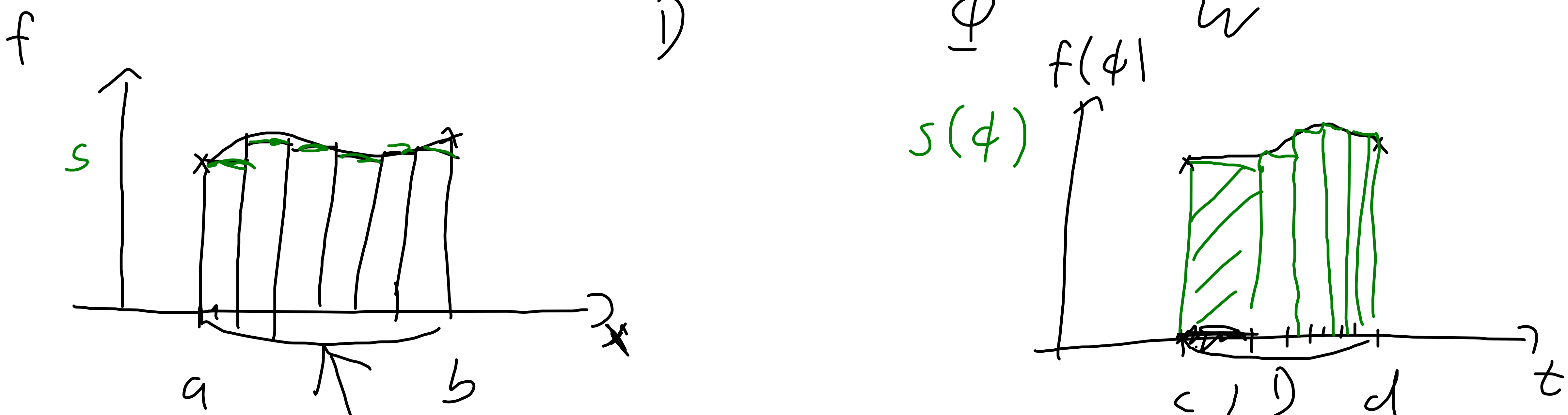
Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

$Q_{n+1} \subset Q_n$ . . . $\boxed{D \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \emptyset}$

Trafosatz



Substitution:

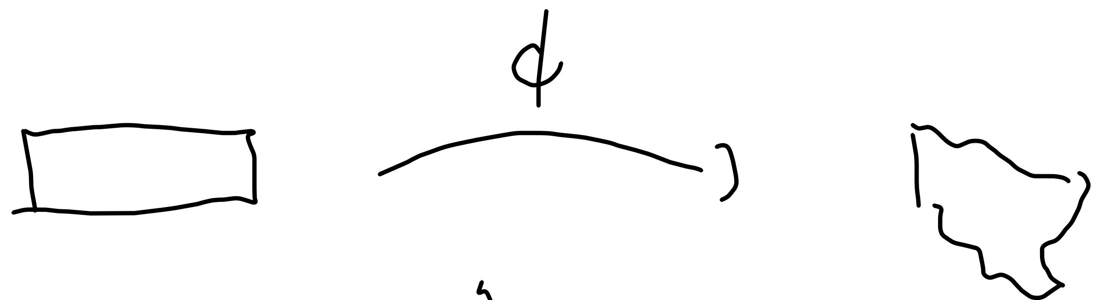


$x = \Phi(t)$

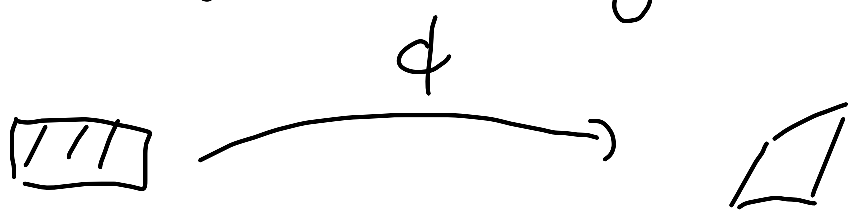
$$\int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(b)} f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, d_x \qquad \Phi$$

$c = \Phi^{-1}(a)$ $\qquad d = \Phi^{-1}(b)$

Nun (Ana II) haben wir Treppenfunktionen auf Quadern q zu betrachten.

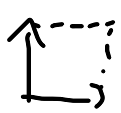


Falls q klein, gute Näherung durch lineare Abbildung

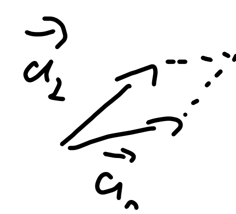


angenähert durch Parallelogramm.

V $\qquad\qquad$ $V \cdot |\det(\phi')|$



$\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \cancel{\vec{b}}$



$|\det A| = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$

$$\boxed{\int_{\phi^{-1}(W)} f(\phi(\vec{t})) \cdot |\det \phi'(t)| \, d^d t = \int_W f(\vec{x}) \, d^d x}$$

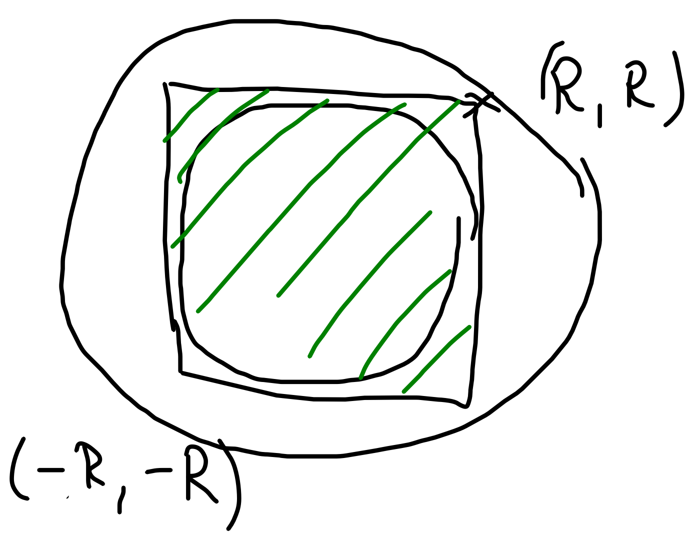
Transformationsformel

Satz (Trafo-Satz): Seien $D, W \subset \mathbb{R}^d$ offen und Jordanmessbar, $\Phi : D \to W$ ein Diffeomorphismus. Sei $f : W \to \mathbb{R}^d$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt die Transformationsformel

$$\int_{\phi^{-1}(W)} f(\phi(\vec{t}))\, |\det \phi'(\vec{t})|\, d^d t = \int_W f(\vec{x})\, d^d x$$

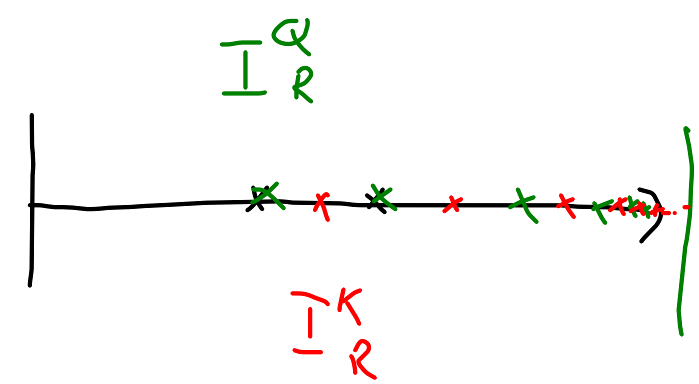
Anwendung: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = ?$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\, dx\, dy}_{= (*)}}$$



$$\int_{Q_R} e^{-x^2-y^2}\, d^2x = I_R^Q$$

$$\int_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2}\, d^2x = I_R^K$$



$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}\, d^2x = \boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2}\, d^2x}$$

Für R fest als bel. benutze die Trafo-formel.

$$\Phi : \,]0,2\pi[\, \times \,]0,R[\, \longrightarrow \mathring{K}_R(0)$$

$$(\varphi, r) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \boxed{x^2+y^2=r^2}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det \Phi' = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r$$

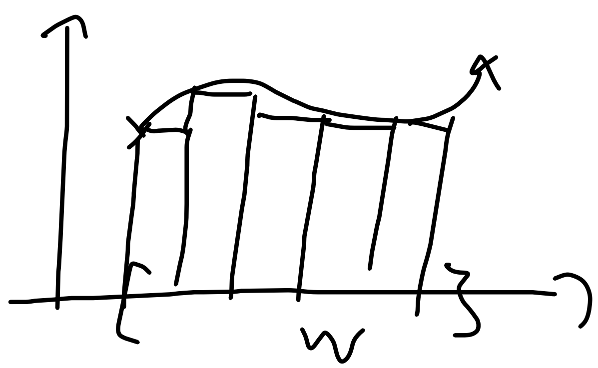
$$(*) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-r^2}}_{f(\Phi(\varphi,r))} \cdot \underbrace{|-r|}_{|\det|}\, d\varphi\, dr = \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2\pi \cdot \boxed{r\, e^{-r^2}}\, dr$$

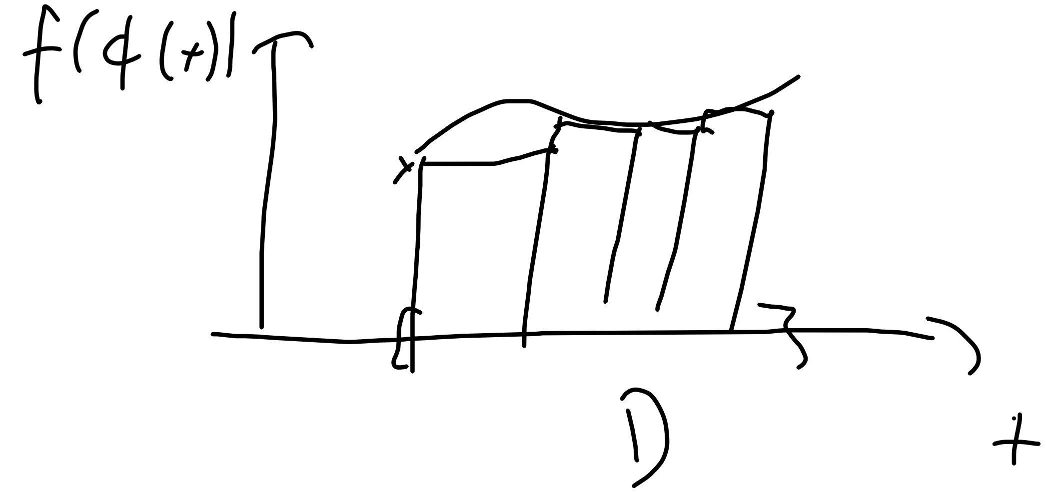
$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\pi\, e^{-r^2}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\pi e^{-R^2} + \pi\right) = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Beweis des Trafosatzes:

Strategie: „Es reicht zu zeigen", dass der Trafo-satz für konstante Funktionen gilt:
Eine allgemeine Funktion nähern wir von unten und oben durch Treppenstufen an. Letztere sind endliche Summen konstanter Funktionen.





$$U(\vec{n}) \le \int_W f(\vec{x})\, d^d x \le O(\vec{n})$$

$$\lim_{k\to\infty} U(\vec{n}_k) - O(\vec{n}_k) = 0$$

für geeignete Folge $(\vec{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$

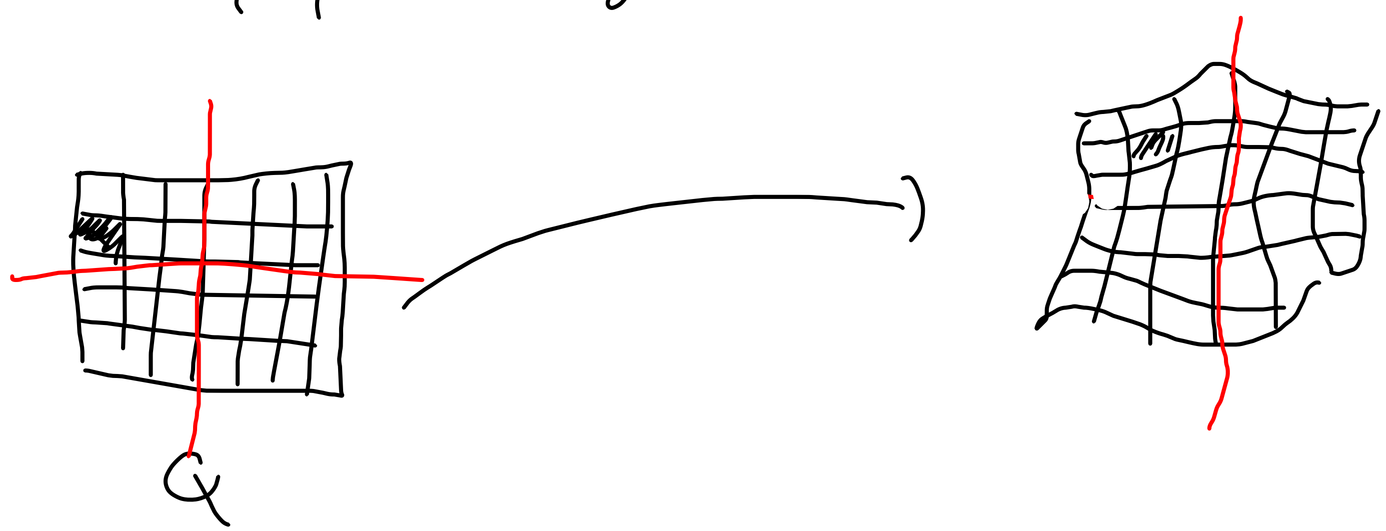
Lemma 1: Die Trafoformel gilt für $f \equiv 1$, und $W = Q$ Quader, Φ linear: $\Phi(x) = A\vec{x} + \vec{b}$

Beweis: Folgt direkt aus der lin. Alg wie oben besprochen:

$$|Q| = \int_Q f(\vec{x})\,dx = |\det(A)| \cdot |\Phi^{-1}(Q)| = |Q| \checkmark$$

Lemma 2: Die Trafoformel gilt für Diffeomorphismen Φ.

Beweis:



WA: $\exists\, \delta > 0$ so dass $\left| |Q| - \int_{\Phi^{-1}(Q)} |\det \Phi'(t)|\, d^d t \right| > \delta$

Wir zerlegen in zwei Teilquader. Die Differenz in mind. einem der Teilquader muss ebenfalls größer $\frac{\delta}{2}$ sein.

Diesen Schritt kann man beliebig oft wiederholen und erhält eine Folge immer kleiner werdender Teilquader:

$\exists \, (q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, Folge von Teilquadern von Q mit:

a) $|q_\ell| = |Q| \, 2^{-\ell}$

b) Durchmesser der Teilquader q_ℓ geht gegen 0.

c) $$\left| \, |q_\ell| - \int_{\phi^{-1}(q_\ell)} |\det \phi'(t)| \, d^d t \, \right| > \delta \cdot 2^{-\ell} \quad \Big| \cdot 2^{\ell}$$

d.h. $$\left| \, |Q| - 2^{\ell} \int_{\phi^{-1}(q_\ell)} |\det \phi'(t)| \, d^d t \, \right| > \delta$$