Termin-ID: NTIwODEz

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 25.10.21

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

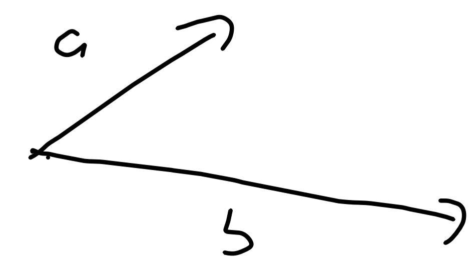
$(V, \|\cdot\|)$ $\quad f(x) = \|x\|$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_1$

<u>1. Schritt</u>: $\quad \|x\| \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in V$

<u>2. Schritt</u>: Stetigkeit:

Formel: $\big| \|a\| - \|b\| \big| \leq \|a-b\|$

(direkt aus Δ-Ungl.)



Für uns: $|f(x) - f(y)| \leq \cancel{\|f(x)-f(y)\|}$

$\leq \|x-y\| \leq C \|x-y\|_1$

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ so folgt

$\forall \varepsilon > 0 : \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad$ falls $\|x-y\|_1 < \delta$

<u>Bemerkung</u>: Wenn dann die Ä. aller N. gezeigt ist gilt für endlich dim. V: Jede Norm ist stetig bzgl. jeder anderen Norm.

Satz: Sei V ein endlichdim. VR, $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, $a \in V$ (bzgl $\|\cdot\|$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$$

Beweis: $$\big|\|a_n\| - \|a\|\big| \leq \underbrace{\|a_n - a\|}_{\to 0 \text{ n.V}}$$

Satz: (Bolzano Weierstraß) Sei V endl. dim. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bzgl $\|\cdot\|_1$ d.h.

$\exists\, C > 0$ mit: $\|a_n\|_1 < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann existiert eine bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis: $a_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^d \end{pmatrix}$. Nach Ana 1. Version von B.W. gibt es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die erste Koordinate konvergiert $\left(\lim\limits_{k\to\infty} a^1_{n(k)} = a^1\right)$

Nach Ana 1 Version von BW gibt es eine Teilfolge hiervon, so dass auch die zweite Koordinate konvergiert

...

$\Rightarrow \exists\ n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend,

so dass $\forall j \in \{1, \dots, d\}$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} a^j_{n(k)} = a^j \quad \text{für entspr. } a_j \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \|a_{n(k)} - a\|_1 = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{|a^j_{n(k)} - a^j|}_{\to 0 \text{ für } k \to \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|a_{n(k)} - a\|_1 = 0.$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \|a_{n(k)} - a\|_1 < \varepsilon \quad \forall k \geq m.$

<u>Bemerkung</u>: Wenn die Ä.d.N bewiesen ist folgt die Gültigkeit des Satzes bzgl. einer beliebigen Norm.:

$$\lim_{k \to \infty} \|a_{n(k)} - a\|_1 = 0 \underset{\text{Ä.d.N}}{\Rightarrow} \lim_{k \to \infty} \|a_{n(k)} - a\| = 0$$

<u>Beweis</u> des Satzes der Ä.a.N.: $\dim(V) < \infty$.

Sei $\|\cdot\|$ Norm auf V.

Wir haben bereits $\|\cdot\| \leq C \cdot \|\cdot\|_1$.

Es bleibt zu zeigen: $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \|\cdot\| \geq K \|\cdot\|_1$

Widerspruchsannahme: $\forall K > 0 \ \exists x : \|x\| < K \|x\|_1$

insb. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n : \|x_n\| < \frac{1}{n} \|x_n\|_1$; $x_n \neq 0$

Wir wählen $\|x_n\|_1 = a_n$ sei $y_n = \frac{x_n}{a_n}$

$\Rightarrow \|y_n\| < \frac{1}{n} \|y_n\|_1 = \frac{1}{n}$

d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n\| = 0$ außerdem gilt nach BW.:

$\exists n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton so dass $\lim\limits_{k \to \infty} y_{n(k)}$ existiert bzgl. $\|\cdot\|_1$

$\lim\limits_{k \to \infty} \|y_{n(k)}\| = 0$ und $\lim\limits_{k \to \infty} y_{n(k)} = y$ bzgl $\|\cdot\|_1$

mit $\lim\limits_{k \to \infty} \|y_{n(k)}\|_1 = \|y\|_1 = 1$ insb. $y \neq 0$!

wegen Stetigkeit von $\|\cdot\|$ bzgl. $\|\cdot\|_1$: $\|\lim\limits_{k \to \infty} y_{n(k)}\| = 0$, d.h. $\|y\| = 0$ ↯

Bemerkung: Wir werden bei Eigenschaften, die von einem Abstandsbegriff abhängen in Fällen, bei denen für äquivalente Normen kein Unterschied besteht, in endlich dim. V die Norm nicht nennen.

"$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ ist konvergent."

Topologie im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

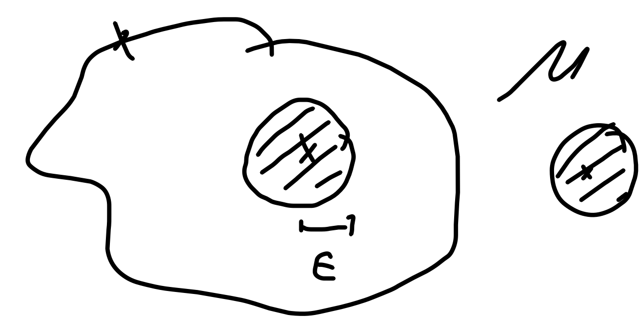
Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein Element $x \in M$ heißt innerer Punkt (von M)

$:\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ so dass $y \in M$ $\forall y : \|x-y\|_2 < \varepsilon$.

(Wegen Äq. N kann hier auch jede andere Norm gewählt werden)

Ein $x \notin M$ heißt äußerer Punkt (von M)

$:\Longleftrightarrow$ x ist innerer Punkt von M^c.



Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt (von M)

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt: $\exists y \in M$ und $\exists z \in M^c$ so dass

$\|x-y\|_2 < \varepsilon$ und $\|x-z\|_2 < \varepsilon$

Satz: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein bel. $x \in \mathbb{R}^n$ ist entweder innerer Punkt oder äußerer Punkt oder Randpunkt von M (exklusiv).

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ kein Randpunkt $\Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon > 0$: entweder: $\forall y$ mit $\|x-y\|_2 < \varepsilon$: $y \notin M$ d.h. $y \in M^c$

oder: $\forall y$ mit $\|x-y\|_2 < \varepsilon$: $y \notin M^c$ d.h. $y \in M$.

d.h. x ist entweder äußerer Punkt oder innerer Punkt.

Es gibt also keine 4. Alternative zu innerer, äußerer, Randpunkt.

Die drei Eigenschaften schließen jeweils die anderen aus.

Beispiel: offene Ball um m mit Radius r:

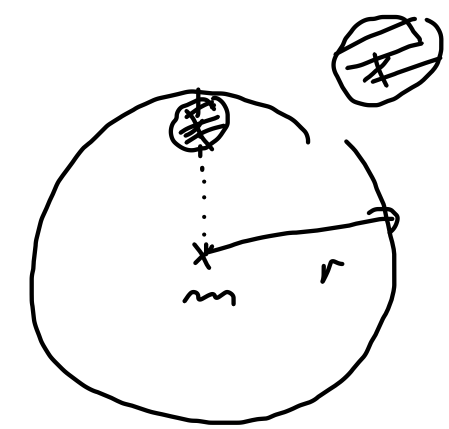
$$B_m(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-m\|_2 < r\}.$$

Jedes $x \in B_m(r)$ ist innerer Punkt

(wähle $\varepsilon : \frac{r - \|x-m\|}{2}$)

Jedes x mit $\|x-m\|_2 > r$ ist äußerer Punkt.

Jedes x mit $\|x-m\|_2 = r$ ist Randpunkt.



Definition: Sei $M \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $\mathring{M}$, die nur aus inneren Punkten von M besteht nennt man inneres von M,

$$\mathring{M} : \{x \in M : x \text{ ist innerer Punkt}\},$$

Analog ist der Rand von M: δM Menge aller Randpunkte und das Äußere $\mathring{M^c}$ dann definiert.

Die Vereinigung von M mit seinem Rand δM nennt man Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von M,

$$\overline{M} := M \cup \delta M$$

Definition: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls sie nur aus inneren Punkten besteht: $M = \mathring{M}$.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls M^c offen ist.