Termin-ID: NTIwODM0

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 26.10.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Bsp: a) $M = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$

Das Innere der Menge ist leer.
Für jedes $x \in M$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine irrationale Zahl y mit $\|x-y\|_2 < \varepsilon$

Für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $\varepsilon > 0$ $\exists z \in M, y \in M^c$ mit $\|x-z\|_2 < \varepsilon$ sowie $\|x-y\|_2 < \varepsilon$.
Jedes $x \in [0,1]$ ist also Randpunkt von M.

M ist weder offen noch abgeschlossen: M^c hat Punkte, die keine inneren Punkte sind z.B $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Der offene Ball vom obigen Beispiel ist offen im Sinne der Definition. Der Rand ist der Kreisring mit Radius eins.

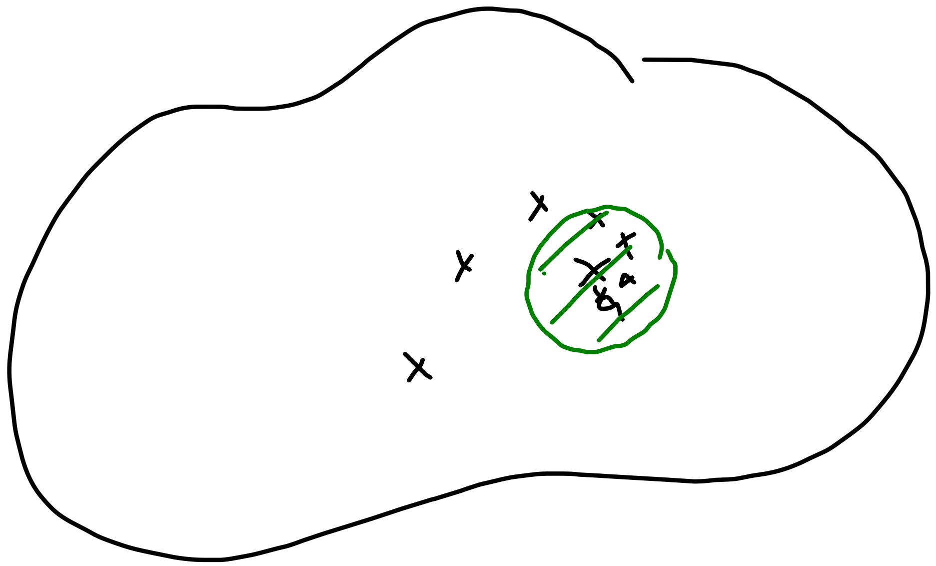
Bemerkung: $\partial M \cap \mathring{M} = \emptyset$ $\qquad \partial M \cap \overline{M} = \partial M$

Für abgeschlossene Mengen gilt: $\partial M \subset M$.

Bemerkung: Die obigen Definitionen lassen sich direkt auf metrische Räume, d.h. Mengen mit einer Metrik, verallgemeinern.

Satz: Sei (X,d) ein metrischer Raum.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.
Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert dann gilt:
$\forall\, U\subset X$ offen mit $a\in U$ gilt:
alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen in U.
$\left(\quad |\{n\in\mathbb{N} : a_n \notin U\}| < \infty \right)$

Beweis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sei $U\subset X$ offen mit $a\in U$.
Da U offen $\exists\, \varepsilon>0$ sodass: $B_a(\varepsilon)\subset U$.
d.h. $\{y\in X : d(a,y)<\varepsilon\}\subset U$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\exists\, n\in\mathbb{N}$ mit $d(a_k,a)<\varepsilon$ $\forall\, k\geq n$
d.h. $\exists\, n\in\mathbb{N}$ mit $a_k\in U$ $\forall\, k\geq n$.
$\Rightarrow$ $|\{k\in\mathbb{N} : a_k\notin U\}| \leq n-1 < \infty$



Satz: Auch die Umkehrung gilt.

Beweis: Sei $a \in X$, $\forall\, U \subset X$ offen mit $a \in U$ seien höchstens endlich viele Folgenglieder nicht in U.

Insbesondere: $\left|\{ k \in \mathbb{N} : d(a, a_k) \geq \varepsilon \}\right| < \infty$

(da $\{d(a,y) < \varepsilon\}$ offen)

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \qquad d(a, a_k) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq n.$

__Satz:__ Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen geben offene Mengen.

"__Gegenbsp__": Falls wir z.B abzählbare Schnitte betrachten, kann das Ergebnis eine nicht-offene Menge sein.

$U_n :=]-1, \frac{1}{n}[$ sind offen

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \underbrace{]-1,0]}_{\text{je } \subset U_n}$$

(jedes $\varepsilon > 0$ ~~ist~~ fliegt beim Schneiden irgendwann raus
wähle n so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \notin U_n$)

__Beweis:__ Sei $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ mit A_i offen.

sei $x \in A \Rightarrow \exists\, i \in I$ mit $x \in A_i \overset{A_i \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists\, \varepsilon > 0$ mit $B_x(\varepsilon) \subset A_i$

$\Rightarrow B_x(\varepsilon) \subset A \Rightarrow A$ ist offen.

Sei I endlich o.B.d.A $I = \{1,2\}$

A_1, A_2 offen $A := A_1 \cap A_2$.

Sei $x \in A \Rightarrow x \in A_1$ und $x \in A_2 \overset{A_{1,2} \text{ offen}}{\Rightarrow}$

$\exists \varepsilon_1 > 0$ mit $B_x(\varepsilon_1) \subset A_1$ $\exists \varepsilon_2 > 0$ mit $B_x(\varepsilon_2) \subset A_2$.

Wähle $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann gilt

$$B_x(\varepsilon) \subset A_1 \text{ und } B_x(\varepsilon) \subset A_2 \Rightarrow B_x(\varepsilon) \subset A.$$

<u>Satz</u>: Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen ergeben abgeschlossene Mengen.

<u>Beweis</u>: Bei Bildung des Komplements werden aus Vereinigungen Schnitte und umgekehrt.

$$\bigcup A_i = \left(\left(\bigcup A_i\right)^c\right)^c = \Big(\underbrace{\bigcap A_i^c}_{\text{offen}}\Big)^c \qquad \ldots$$

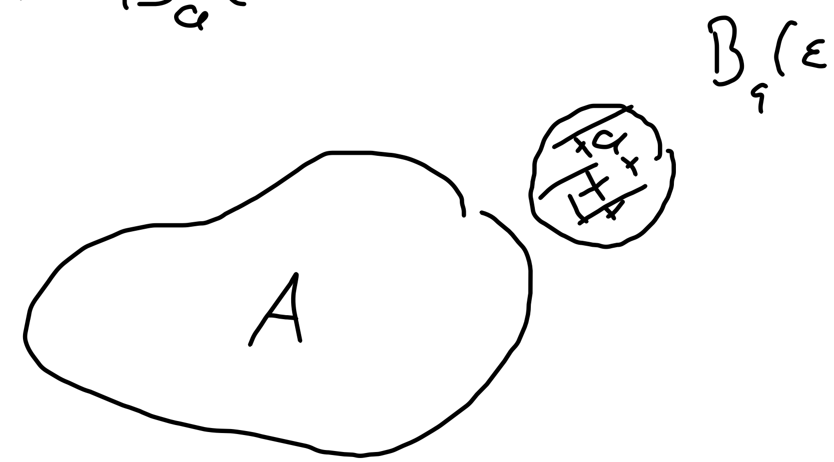
<u>Satz</u>: Sei $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

A ist genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ auch der Limes in A liegt.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" Sei $A \subset X$ abgeschlossen, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(\in X)$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. z.z: $a \in A$.

<u>Widerspruchsannahme</u>: $a \notin A \Rightarrow a$ ist äußerer Punkt.
$a \in A^c$ (A^c offen)

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\, U$ offen mit $a \in U$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in U.
Wähle U so, dass $U \subset A^c$ z.B. $U = B_a(\varepsilon)$ mit entspr. ε.



1) alle Folgenglieder sind in A
2) alle (b.a.e.v) Folgenglieder sind in $U \subset A^c$

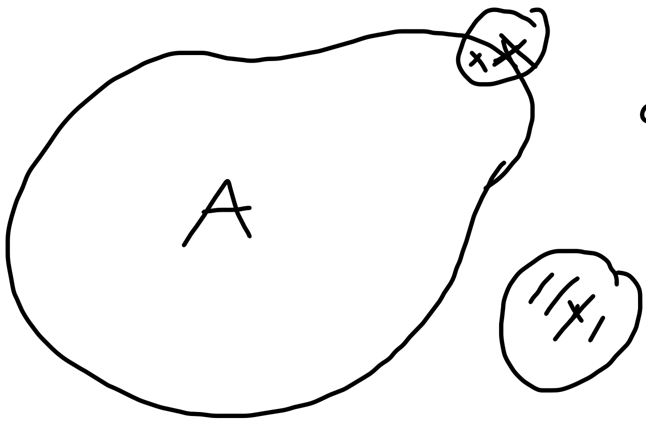
$\lightning$

"$\Leftarrow$" Für jedes konvergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gelte, dass

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in A$. z. z. A ist abgeschlossen

W. A.: A ist nicht abgeschlossen bzw A^c ist nicht offen.

$\Rightarrow \exists\, x \in A^c$ mit x ist kein innerer Punkt von A^c.



d. h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists\, \underbrace{y \notin A^c}_{y \in A}$ mit $\boxed{d(x,y) < \varepsilon}$

Wähle y_n als das entspr. y für $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ $\qquad x \notin A$ $\quad$ ↯

Definition: Sei (X,d) metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow$
Jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge: $\forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ gilt:

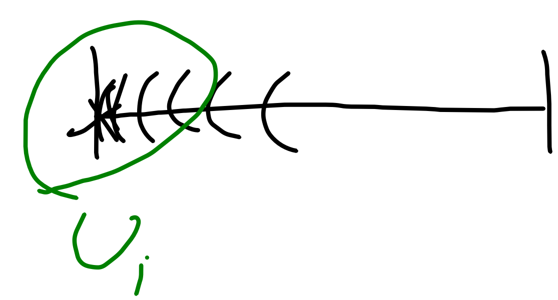
$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} \in K \quad \text{für ein } n: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ streng monoton.}$$

Satz: eine kompakte Menge ist natürlich abgeschlossen.

Alternative Def: Eine Menge K heißt kompakt $:\Leftrightarrow$
Jede Überdeckung von K mit offenen Mengen hat endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$\bigcup_{i\in I} U_i \supset K \implies \exists\, J \subset I \text{ mit } |J| < \infty \text{ so dass}$$

$$\bigcup_{i\in J} U_i \supset K.$$



<u>Satz</u>: Sei V endlich dim. VR, dann ist $K \subset V$ kompakt genau dann wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" K kompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen ist klar

Wäre K nicht beschränkt könnte man eine "divergente Folge" definieren.:

<u>WA</u>: K nicht beschränkt $\Rightarrow$ $\forall C \; \exists x \in K$ mit $\|x\|_2 > C$

~~setze~~ wähle x_n so dass $\|x_n\| > n$.

Diese Folge konvergiert nicht, auch keine Teilfolge davon.

$\lightning$ K kompakt.