Termin-ID: NTIwODEx

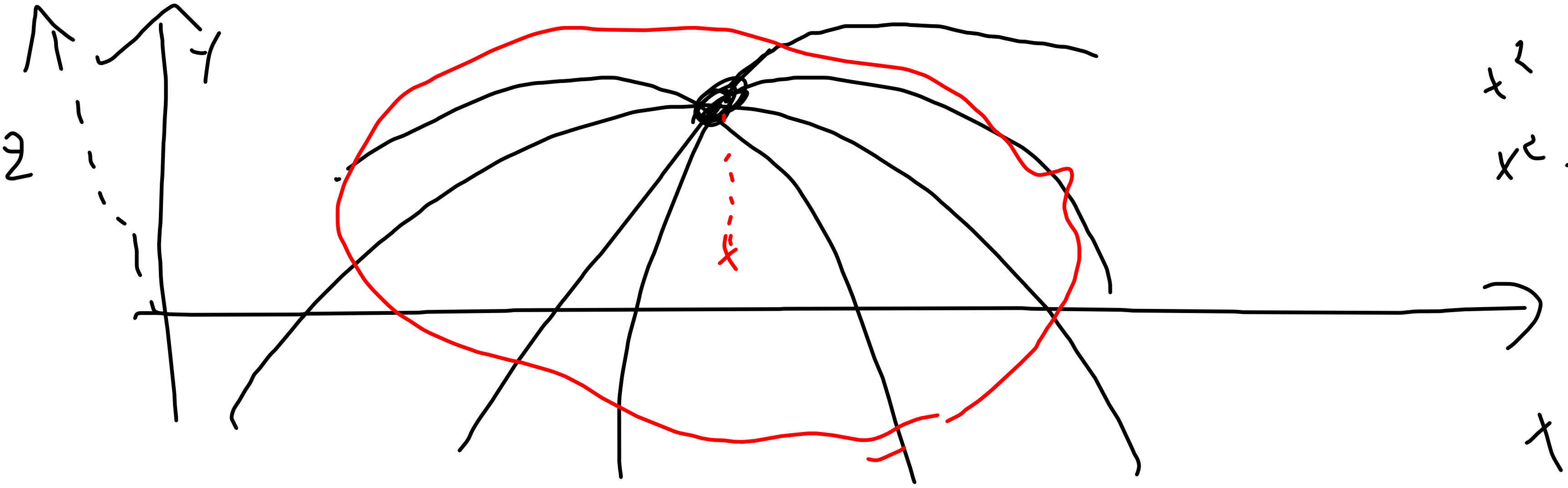
Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 29.11.21

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07



$x^2 + y^4$

$x^2 + y^3$

$\mathbb{R}^2$: positive Definitheit an Spur und det ablesen,

i.a.: betrachte die EW der Matrix.

Bsp: $f(x,y) = (x+1)^2 \cdot e^{-xy+y^2}$

Kritische Punkte: $\frac{d}{dx} f(x,y) = 2(x+1)\, e^{-xy+y^2} + (x+1)^2 \cdot (-y)\, e^{-xy+y^2}$

$$= \left[2(x+1) - y(x+1)^2\right] e^{-xy+y^2}$$

$$\frac{d}{dy} f(x,y) = (x+1)^2\, e^{-xy+y^2} (-x+2y)$$

Krit Pkt: $\nabla f(x,y) = 0$ $\quad \frac{d}{dy} f = 0 \Rightarrow x = -1 \; ; \; y = \frac{1}{2} x$

1. Fall: $x = -1$ wann ist auch $\frac{d}{dx} f = 0$?

A: immer

2. Fall: $y = \frac{x}{2}$ $\frac{d}{dx} f = 0$?

$$\frac{d}{dx} f = \left[2(x+1) - \frac{x}{2} \cdot (x+1)^2 \right] \cdot e^{\sim} =$$

$$= (x+1) \left[\underbrace{2 - \frac{x}{2}(x+1)}_{\text{neu}} \right] \cdot e^{\sim}$$

$$2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = 0 \qquad x_{1/2} := + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Hesse matrix: $\frac{d^2}{dx^2} f = \frac{d}{dx} \left[\left(2(x+1) - y(x+1)^2 \right) \cdot e^{-xy+y^2} \right] =$

$$= \left[2 - 2y(x+1) \right] \cdot e^{\sim} + \cancel{\underbrace{\left[2(x+1) - y(x+1)^2 \right] \cdot (-y)\, e^{\sim}}_{\frac{d}{dx} f \cdot (-y)}}$$

$= 0$ an allen Krit. Pkt

z.B: $\left(\frac{+1-\sqrt{17}}{2}, \frac{+1-\sqrt{17}}{4} \right) \Rightarrow \left[2 - 2\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right) \left(\frac{2-\sqrt{17}}{4} \right) \right] e^{\cdots}$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f = \frac{d}{dy}\left[2(x+1) - y(x+1)^2\right] e^{-xy+y^2}$$

$$\cancel{\left[2(x+1) - y(x+1)^2\right] \cdot e^{-xy+y^2}} \cdot (-x+2y)$$

0 am krit Pkt

$$+ -(x+1)^2 e^{-xy+y^2}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{d}{dy} f = \frac{d}{dy}\left[(x+1)^2 \cdot (-x+2y) \cdot e^{-xy+y^2}\right] =$$

$$= \cancel{[\ldots] \cdot (-x+2y)} + (x+1)^2 \cdot 2 \cdot e^{-xy+y^2}$$

$$\text{spur } H = 2(x+1)^2 \cdot e^{\ldots} + (2 - 2y(x+1))\, e^{\ldots} =$$

$$\left[2(x+1)^2 + 2 - 2y(x+1)\right] e^{\ldots}$$

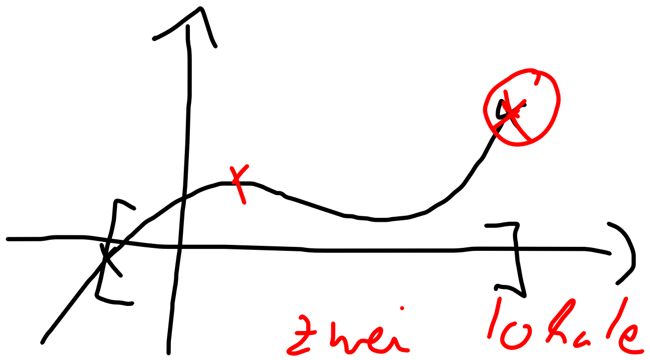
$$> 0$$

$$\Big|_{(x,y) = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)}$$

$$\det H = \frac{d}{dx^2} f \cdot \frac{d}{dy^2} f - \left(\frac{d}{dx}\frac{d}{y} f\right)^2$$

$$= e^{-2xy+y^2} \left(\ldots \right) \quad > 0 \quad \Rightarrow \text{Min. da } H \text{ positiv}$$

Wie in Analysis 1 können Extrema auch auf einem Rand liegen



zwei lokale Max, eines am krit. Pkt., eines am Rand $\otimes$.

Extrema unter Nebenbedingungen

In Analysis 2 sieht der Rand häufig kompliziert aus:

$f(x,y) = e^{-x^2+(y+1)^2}$ $\quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$

lokale Extrema können auf dem Rand liegen: $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

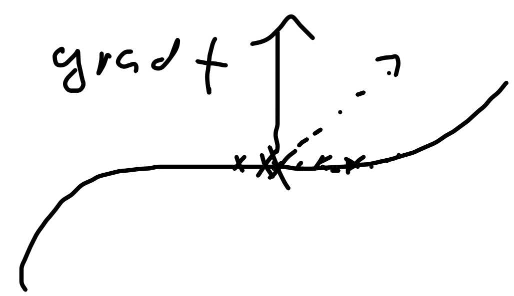
Dieser besteht nicht einfach aus 2 Punkten wie in Ana 1.

Wir suchen also neben den kritischen Punkten im Inneren, Extrema von f auf $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$, d.h. Extrema unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. Dann nennt man die Menge $L_f(h) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = h \}$ Höhenlinie von f mit Wert h. (zur Höhe h).

Falls f diffbar dann steht der Gradient von f senkrecht auf die Höhenlinie.

Ansonsten wäre die Richtungsableitung entlang der Höhenlinie ungleich 0!



Wir werden die Nebenbedingungen als Höhenlinie einer Funktion angeben, das macht die Bestimmung der Extrema einfacher.

Obiges Bsp: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, Nebenbed. erfüllt auf der Höhenlinie mit $h=0$

An ein lokalen Extremum unter der Nebenbedingung gilt auch für f dass der gradient senkrecht auf der Höhenlinie von g liegt.
(gemeint ist die Höhenlinie, die die NB definiert)

$\langle \operatorname{grad} f, \vec{v} \rangle = 0$ $\vec{v}$ die Richtung entlang der Nebenbed.

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g$.

d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\operatorname{grad} f - \lambda \operatorname{grad} g = 0$

Man sucht also für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das lokale Max von $f - \lambda g$.

d.h. $\nabla(f - \lambda g) = 0$. λ heißt Lagrange parameter.

Da g auf der Nebenbed. konstant ist, hat natürlich $f - \lambda g$ ein lokales Extremum unter Nebenbed., falls f allein ein solches besitzt.

Die kritischen Punkte sind also Stellen, für die ein λ existiert so dass $\nabla(f - \lambda g) = 0$.

g sollte so gewählt werden, dass grad g auf der Höhenlinie nicht 0 ist.

Bsp: Nebenbed: $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ $\quad g(x,y) = x^2+y^2-1$

$$f(x,y) = e^{-x^2+(y+1)^2}$$

$$\text{grad } f = \left(-2x\, e^{-x^2+(y+1)^2},\ 2(y+1)\cdot e^{-x^2+(y+1)^2}\right)$$

$\Rightarrow (0,-1)$ krit. Pkt ohne Nebenbed.

$$\text{grad } g = (2x, 2y)$$

$$\begin{pmatrix} -2x \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \cdot e^{\cdots} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda = e^{\cdots}\tilde{\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} -2x \\ 2(y+1) \end{pmatrix} - \tilde{\lambda} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0$$

aus I $\Rightarrow \tilde{\lambda} = -1$ in II $2y+2+2y=0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Achtung! $x=0$ nicht vergessen.

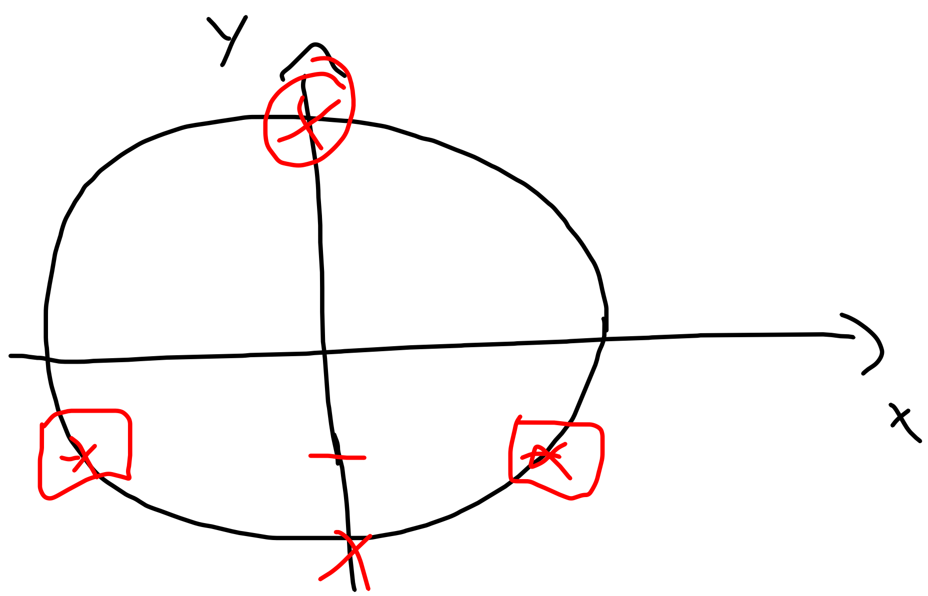
1. Fall : $\tilde{\lambda} = -1$ $\quad y = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Fall : $x = 0$ dann ist I erfüllt

$$\text{II} \quad (2y+1) - \tilde{\lambda}(2y) = 0$$

$$\text{III} \quad x^2+y^2-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

aus II könnte man $\tilde{\lambda}$ berechnen,



Berechne die Werte von f an den kritischen Punkten, daraus könnten wir ablesen, ob lokale Max oder Min vorliegen.