Termin-ID: NTIwODI4

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

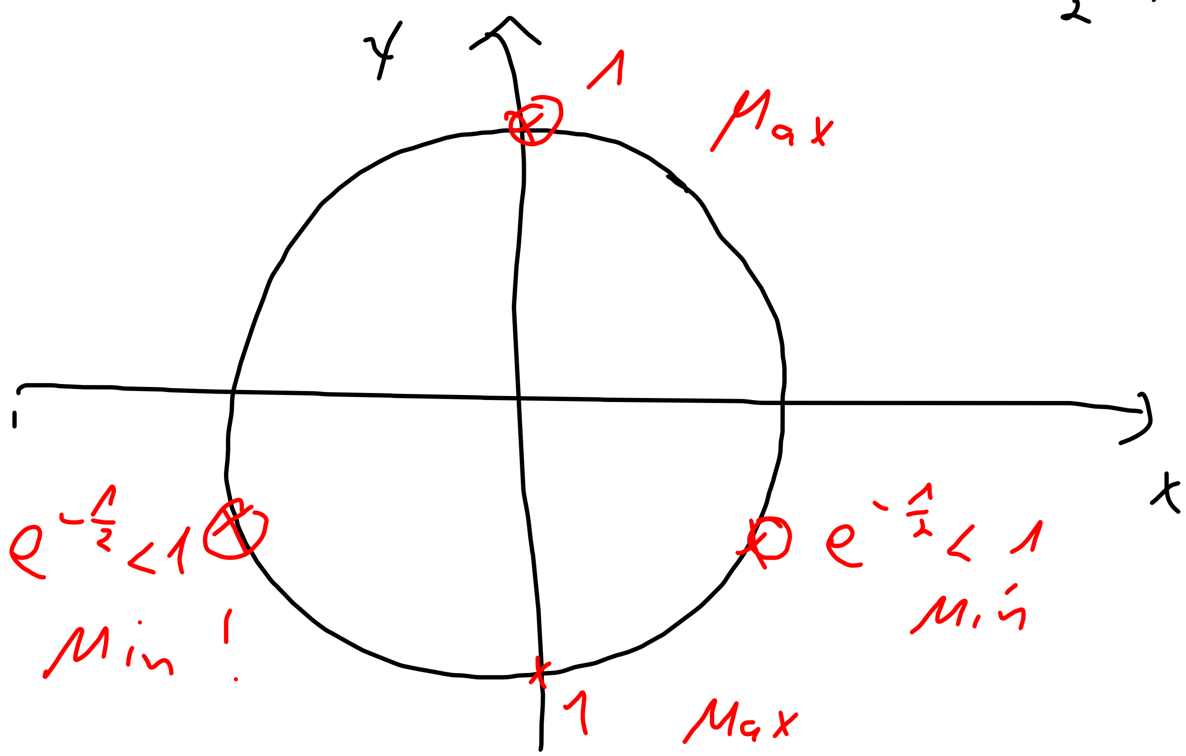
Datum: 30.11.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

$e^{-x^2+(y+1)^2}$ $\quad \{x^2+y^2-1=0\}$

Krit Punkte: $(1,0)$; $(-1,0)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



$f(1,0)=1$ $\quad f(-1,0)=1$ $\quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{2}}<1$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}<1$

Die Methode lässt sich auf mehr als 2 Dimensionen erweitern. $f(x,y,z)$, NB: $g(x,y,z)=0$

wieder ist grad f // grad g am krit. Punkt.

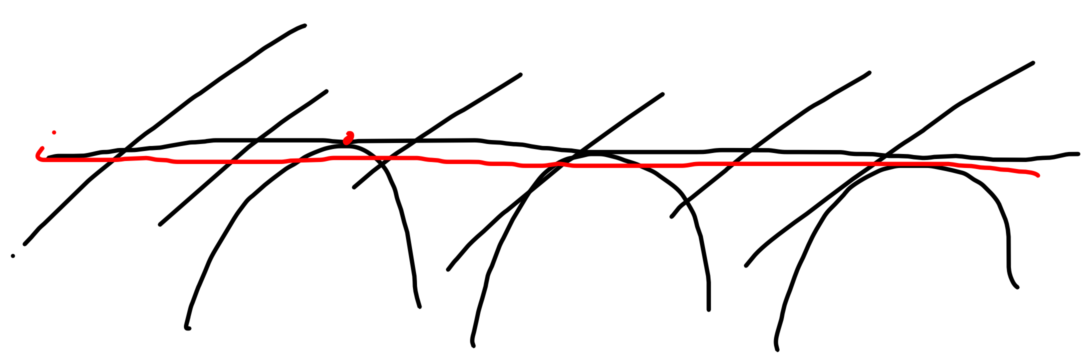
Man kann hier mehrere Nebenbedingungen betrachten.

$f(x,y,z)$ NB 1 $g_1(x,y,z)=0$ NB2: $g_2(x,y,z)=0$

Dann ist grad f liegt in der Ebene, die von grad g_1 und grad g_2 aufgespannt wird (am krit. Punkt)

$$\text{grad } f - \lambda_1 \text{ grad } g_1 - \lambda_2 \text{ grad } g_2 = 0$$ für geeignete λ_1, λ_2.

Problematisch wäre der Fall, wenn grad g_1 // grad g_2.



$\lightning$

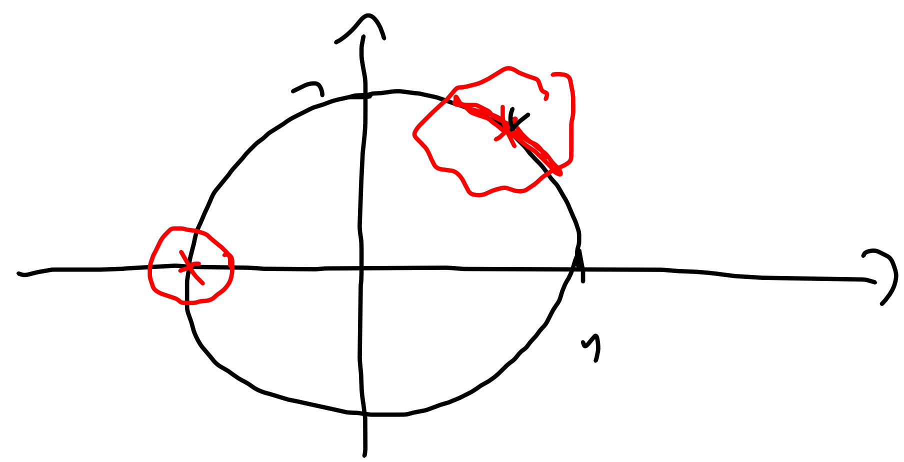
$g(x,y)=0$ ist eine Höhenlinie.

Wann ist die Höhenlinie in der Tat die Spur einer Kurve?
Wann kann man die Höhenlinie als Graph einer Funktion
$y=h(x)$ schreiben?

$$\gamma : x \to \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Spur von γ ist Graph von h.

Bsp: $g(x,y) = x^2+y^2-1$



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi[$ hat als
Spur genau die Höhenlinie $g=0$.

Als Graph einer Funktion lässt sich $g=0$ nicht schreiben,
aber an den meisten Stellen geht das zumindest lokal.
d.h. an den meisten Punkten $w \in \{g(x,y)=0\}$ gibt es eine offene
Umgebung $U \ni w$, so dass $\{g(x,y)=0\} \cap U$ ein Graph ist.

Dies könnte man auch beim Kapitel Extrema unter NB gut gebrauchen:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{g(\gamma(t))}_{\equiv 0} = 0$$

$\langle \operatorname{grad} g, \gamma' \rangle$ bzw. $\gamma' \cdot \operatorname{grad} g = 0$

Für lok. Extrema von f entlang von γ hat man:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{f(\gamma(t))}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} = 0 \qquad \text{krit. Pkt wie Ana I}$$

$$\gamma' \cdot \operatorname{grad} f = 0 \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g.$$

Satz über die implizite Funktion

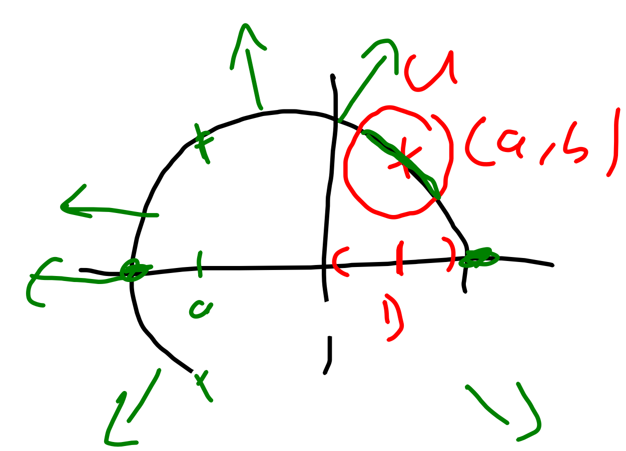
Eine Funktion $h : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt implizit definiert, falls man ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ angibt, und $f(x, h(x)) = 0$ fordert. Wenn man die Fkt mittels Formel $h(x) = \dots$ angibt, nennt man dies explizit.

Satz (über d. impl. Fkt I): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.

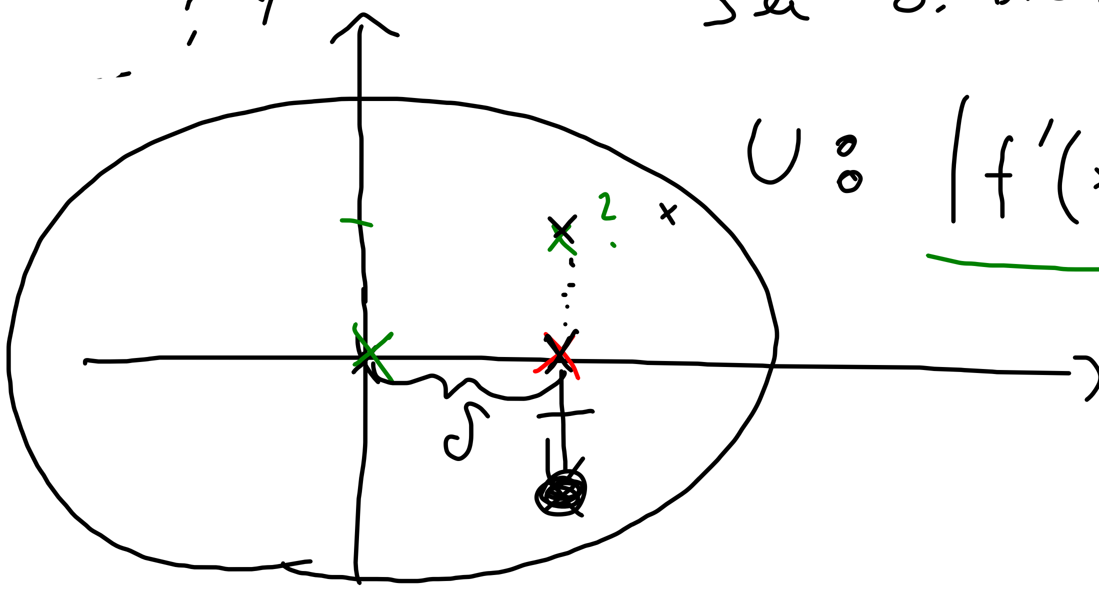
Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a,b) = 0$.

Sei $\frac{d}{dy} f(a,b) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U mit:

$\mathbb{R}^2 \supset U \ni (a,b)$, U offen und ein $D \subset \mathbb{R}$ mit $a \in D$, D offen, und eine Funktion $h : D \to \mathbb{R}$, so dass $f(x,y) = 0 \iff y = h(x)$ für alle $(x,y) \in U$.



Beweis:



Sei o. B. d. A. $a, b = 0$.

U: $|f'(x,y) - f'(0,0)| < \varepsilon$

Betrachte $f(\delta,0)$. 1. Fall: $f(\delta,0) > 0$.

Idee: wir gehen so weit in die y-Richtung, bis $f(\delta,y) < 0$

$\frac{d}{dy} f(x,y) \neq 0$ für ε hinreichend klein.

Falls $\frac{d}{dy} f(0,0) = \lambda > 0$ ist, dann ist $\frac{d}{dy} f(x,y) > \lambda - \varepsilon$

wähle $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ dann ist $\frac{d}{dy} f(x,y) > \frac{\lambda}{2}$

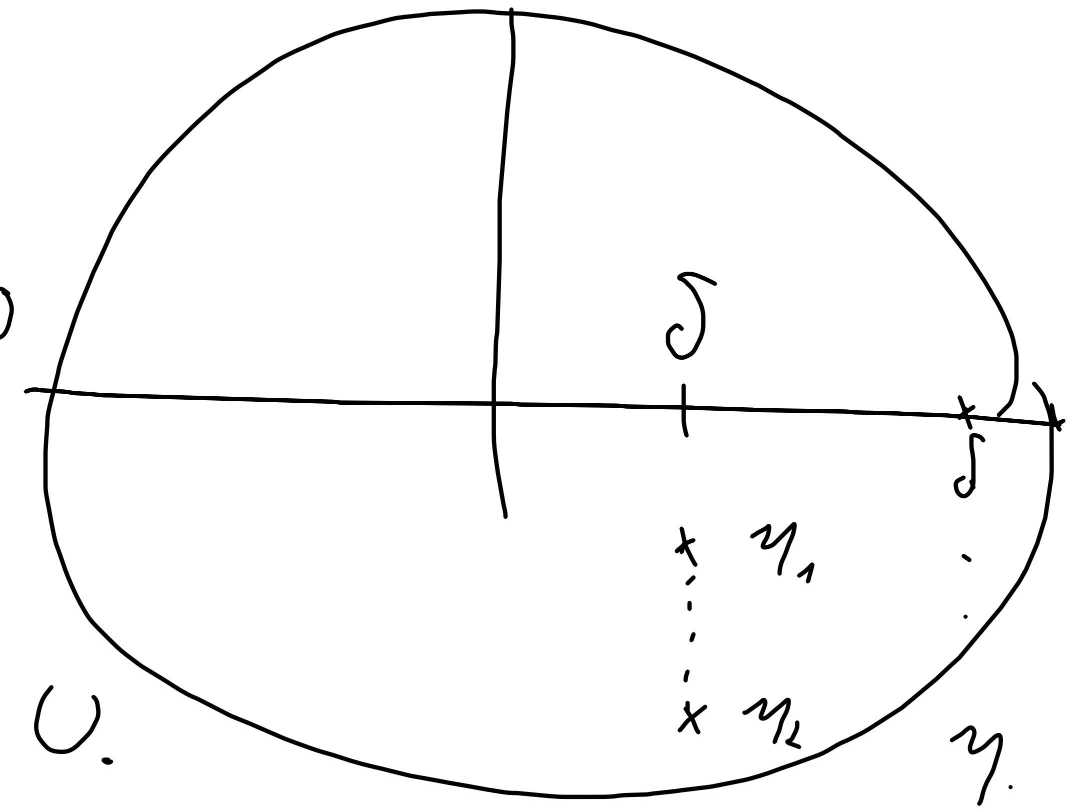
$\Rightarrow f(\delta,y) = f(\delta,0) + \frac{d}{dy} f(\delta,\xi) \cdot y$ MWS.

wähle $y = -\frac{f(\delta,0)}{\frac{\lambda}{2}}$ $\Rightarrow$ $f(\delta,y) < f(\delta,0) - \cancel{\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{f(\delta,0)}{\cancel{\frac{\lambda}{2}}} = 0$

Da $f(\delta,0)>0$ und $f(\delta,y)<0$ gibt es dazwischen einen Wert $\eta : f(\delta,\eta)=0$ ZWS.

Wir haben also ein $\eta := h(\delta)$ gefunden mit $f(\delta, h(\delta))=0$.

Dieser Wert $h(\delta)$ ist eindeutig!



WA: $f(\delta,\eta_1)=0$ und $f(\delta,\eta_2)=0$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [\eta_1,\eta_2]$ mit $\frac{d}{dy} f(\delta,\xi)=0$

↯ zu $\frac{d}{dy} f(x,y) > \frac{\lambda}{2}$ auf ganz U.

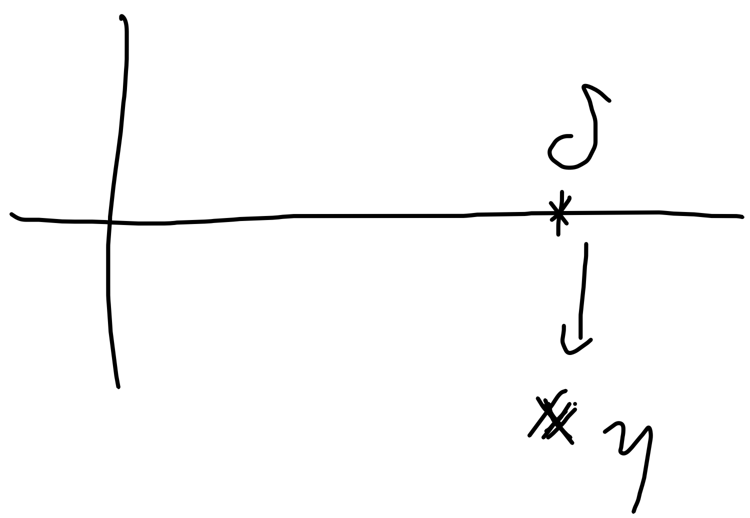
Wir müssen nur noch überprüfen, dass $(\delta,\eta)\in U$.

Aber da $|\eta| = |y| = \frac{f(\delta,0)}{\frac{\lambda}{2}} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ da f stetig, $f(0,0)=0$

Wenn δ hinreichend klein ist, bleibt $(\delta,\eta)\in U$.

Die anderen Fälle, $f(\delta,0)<0$, $\frac{d}{dy} f(0,0)<0$ etc. analog.

Man kann auch die Ableitung von h bestimmen



wähle $\varepsilon << \frac{\lambda}{2}$

$$f(\delta,0) = \frac{d}{dx} f(0,0)\cdot\delta + r_1\cdot\delta \qquad \lim_{\delta\to 0} r_1 = 0$$

$$\underbrace{f(\delta,\eta)}_{0} = f(\delta,0) + \frac{d}{dy} f(0,0)\cdot\eta + r_2\cdot\eta \qquad \lim_{\delta\to 0} r_2 = 0$$

$$\eta = \frac{-\frac{d}{dx} f(0,0)\cdot\delta - r_1\delta}{\frac{d}{dy} f(0,0) + r_2} = \frac{-\frac{d}{dx} f(0,0) - r_1}{\frac{d}{dy} f(0,0) + r_2}\cdot\delta$$

Im Limes $\delta \to 0$ erhält man also:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\eta}{\delta} = \frac{-\frac{d}{dx} f(0,0)}{\frac{d}{dy} f(0,0)} = \lim_{\delta\to 0} \frac{h(\delta) - h(0)}{\delta} = h'(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(0) = \frac{-\frac{d}{dx} f(0,0)}{\frac{d}{dy} f(0,0)}}$$

h ist also sogar diffbar auf D.