Termin-ID: NTIwODE1

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 31.01.22

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

$\boxed{WA \Rightarrow}$ $\exists\, \delta > 0$ so dass $\left| \int \ldots - \int \ldots \right| > \delta$

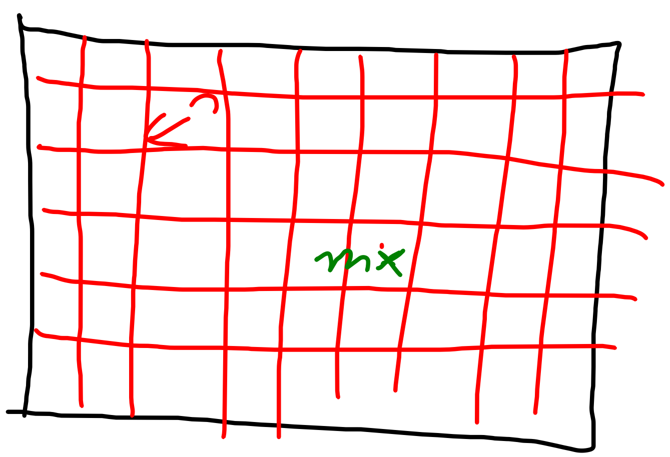
$\exists\, (q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ Folge von Teilquadern von Q mit:

a) $|q_\ell| = |Q| \cdot 2^{-\ell}$

b) Der Durchmesser der Teilquader q_ℓ geht gegen 0

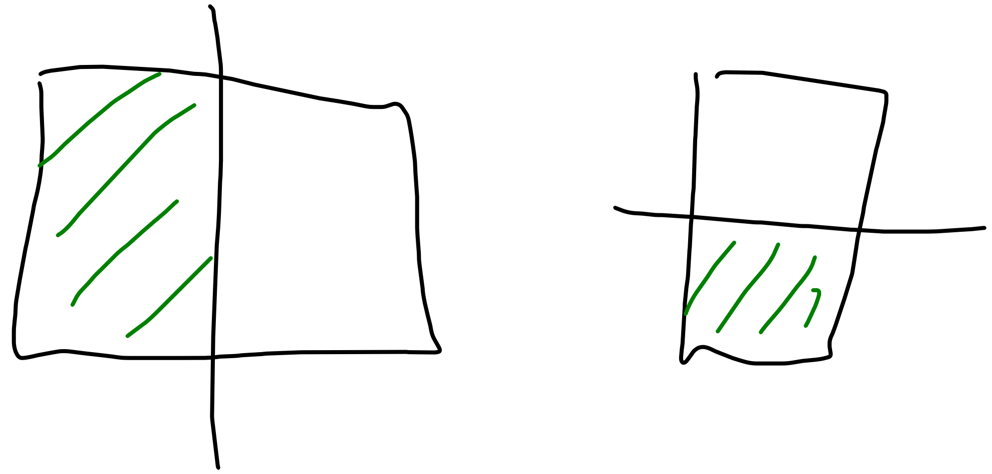
c) $\left| |Q| - \boxed{2^\ell \int_{\phi^{-1}(q_\ell)} |\det \phi'(t)|\, d^d t} \right| > \boxed{\delta}$

Q



$$\int_{\phi^{-1}(Q)} f(\vec{x})\, |\det \phi'(x)|\, d^d x = \int_Q f(t)\, d^d t$$

$$\int \ldots = \int \ldots$$



d) Die Folge der Mittelpunkte der Teilquader q_k konvergiert.
Den Limes nennen wir m. (Intervallschachtelungsprinzip).

Betrachte: $2^k \int_{\phi^{-1}(q_k)} |\det \phi'(t)| \, d^d t \doteq 2^k \cdot |\phi^{-1}(q_k)| \cdot |\det \phi'(\xi_k)|$

Wir zeigen i) $\lim_{k \to \infty} |\det(\phi'(\xi_k))| = |\det(\phi'(m))|$

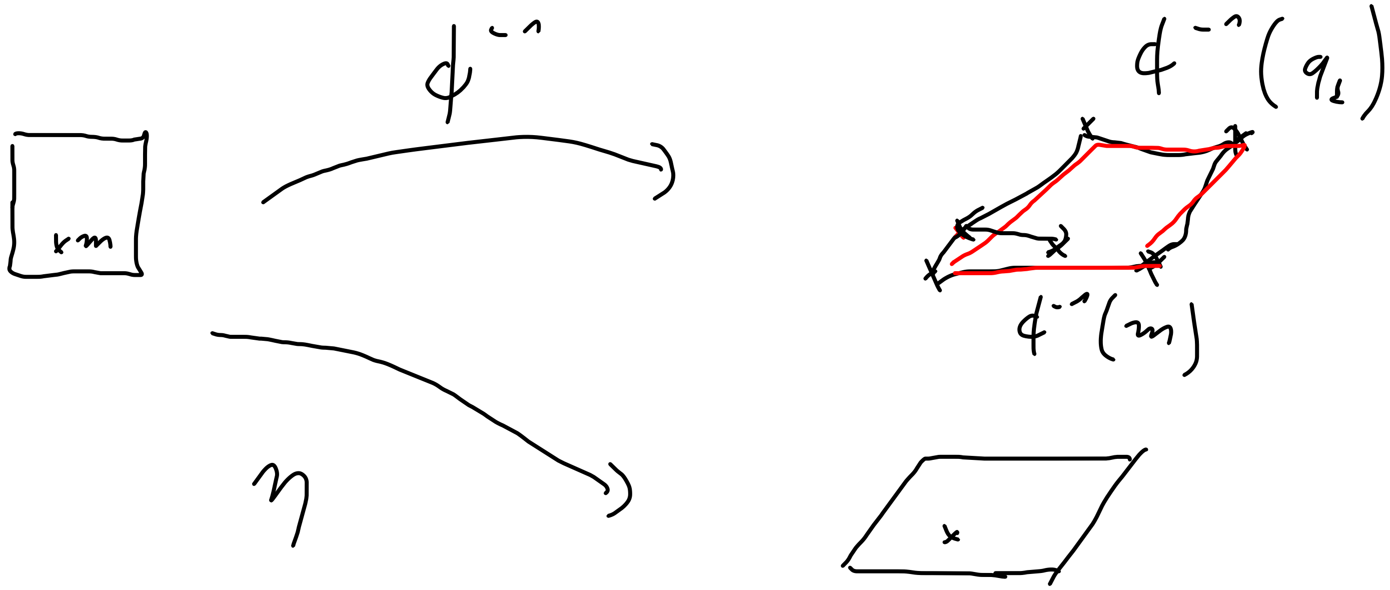
ii) $2^k \lim_{k \to \infty} |\phi^{-1}(q_k)| = |\alpha| \frac{1}{|\det(\phi'(m))|}$

Dies gemeinsam bildet den Widerspruch zu c).

zu i): "$|\cdot|$" ist stetig, det ist stetig, ϕ ist Diffeo. also ϕ' ist stetig

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |\det(\phi'(\xi_k))| = |\det(\phi'(\lim_{k\to\infty} \xi_k))| = |\det(\phi'(m))|$ ✓

ii) $\lim_{l\to\infty} 2^l \, |\phi^{-1}(q_l)| = |Q| \cdot \frac{1}{|\det \phi'(m)|}$



$\eta' = (\phi^{-1})'(m)$

$(\eta(\vec{x}) = (\phi^{-1})'(m)\,\vec{x} + \vec{b})$

$$2^l \cdot |\eta(q_l)| = 2^l \cdot |\det(\eta')| \cdot |q_l| = |Q| \cdot \det(\eta')$$

$$= |Q| \cdot \frac{1}{|\det(\eta')^{-1}|} = |Q| \frac{1}{|\det \phi'(m)|}$$

$$\left(\phi(\phi^{-1}) = 1 \qquad \underline{\phi'(\phi^{-1})} \circ \underline{(\phi^{-1})}' = 0 \right)$$

Der Satz von Taylor gibt uns, dass die 1. Ordnung Taylorapprox. im Limes gültig ist. η ist die 1. Ordnung Taylor um ϕ^{-1}.

Wir haben den Trafosatz für konstante Funktionen bewiesen. Wir werden ihn nun auf beliebige integrierbare Funktion erweitern. Zunächst $f \geq 0$

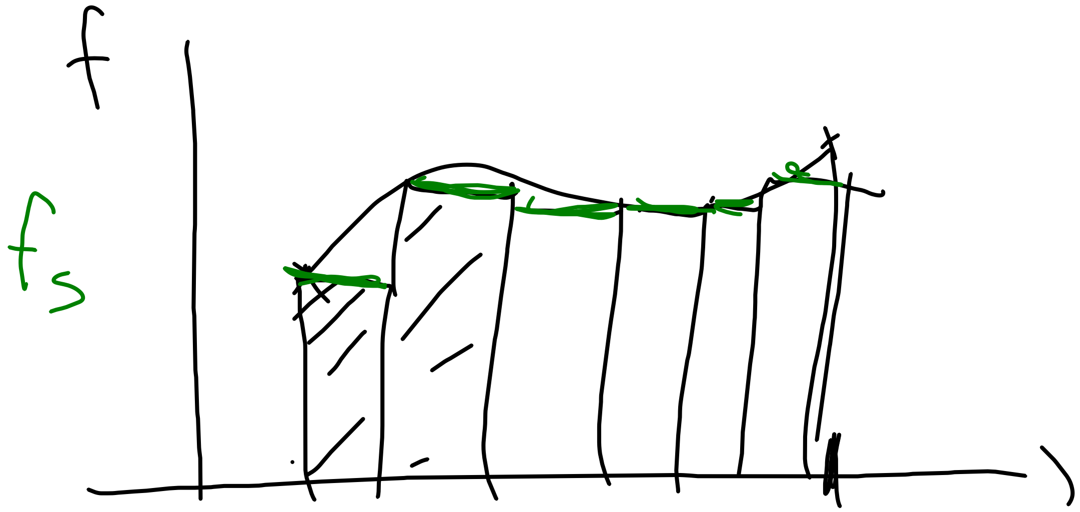
Dazu zunächst z.z.:
$$\int_{\phi^{-1}(D)} f(\phi(\vec{x}))\,|\det \phi'(\vec{x})|\, d^d x \geq \int_D f(\vec{t})\, d^d t, \qquad (*)$$

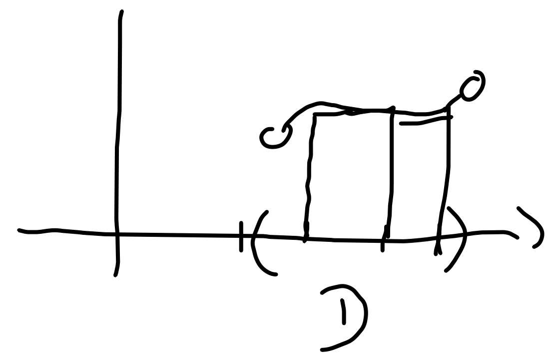
Falls diese Formel gilt, liefert diese angewandt auf $\tilde{f} = f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|$ mit $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$

$$\int_D f(t)\, d^d t \overset{=}{\leq} \int_{\phi^{-1}(D)} \underbrace{f(\phi(\vec{x}))\,|\det \phi'(\vec{x})|}_{\tilde{f}}\, d^d x \overset{=}{\leq} \int_D f(\underbrace{\phi(\tilde{\phi}(\tilde{x}))}_{\tilde{x}}) \cdot |\det \phi'(\tilde{\phi}(\tilde{x}))| \cdot |\det \tilde{\phi}'(\hat{x})|\, d^d x$$

Beweis von (*): f ist n.V. integrierbar. Wir finden $\forall \varepsilon > 0$ eine Stufenfunktion

$$f_s \quad \text{mit} \quad f_s \leq f \quad \text{so dass} \quad \left| \int_D f_s - f\, d^d x \right| < \varepsilon$$





$\tilde{D} \subset D$, da Näherung von unten.

$$\int_D f(t)\,dt \le \int_{\tilde{D}} f_s(t)\,dt + \varepsilon \overset{\text{Trafosatz (+Lin)}}{=} \int_{\phi^{-1}(\tilde{D})} f_s(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|\,d^dx + \varepsilon$$

$$\underset{\text{Monotonie}}{\le} \int_{\phi^{-1}(D)} f_s(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|\,d^dx$$

(falls f nicht negativ). $\overset{\text{da } \varepsilon \text{ bel.}}{\Rightarrow} \int_D f(\vec{t})\,d^dt \le \int_{\phi^{-1}(D)} \dots$

Wegen des obigen Argumentes folgt nun die Gültigkeit des Trafosatzes für nicht negative Funktionen.

Für allgemeines f zerlegen wir einfach in positiven + negativen Anteil.

Integration von $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

Die entsprechenden Integrale, sogar für "$m = \infty$" lassen sich komponentenweise definieren, entsprechend gelten obige Sätze.

z. B. Trafosatz: $$\int_D \vec{f}(t)\, d^d t = \int_{\Phi^{-1}(D)} \vec{f}(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, d^d x$$

(Mittelwertsatz ist problematisch, die entsprechende Stelle kann von der Komponente abhängen).