MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT WS 2021/22
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

# Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

## Blatt 4

**Aufgabe 1** *(2 Punkte)***:**

a) Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

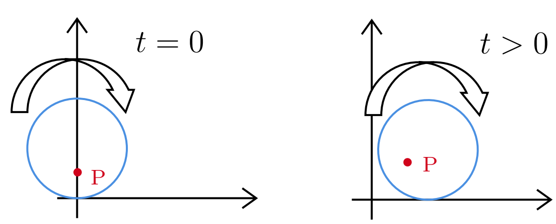
b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ mit der Metrik aus a) nicht vollständig ist.
*Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_k = k$.*

c) Sei $\infty$ ein beliebiges Element, das nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Setzen Sie $d$ so auf $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu einer Metrik $\tilde{d}$ fort, dass die Folge aus b) zu einer konvergenten Folge wird.

**Aufgabe 2** *(2 Punkte)***:** Berechnen Sie jeweils die Längen der folgenden Kurven:

a) ein Zykloid beschrieben durch $\gamma_a \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma_a(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$,

b) eine logarithmische Spirale $\gamma_b \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma_b(t) := \mu e^{\lambda t} (\cos t, \sin t)$ mit $\mu < 0 < \lambda$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.




**Aufgabe 3** *(2 Punkte)***:** Ein Zylinder mit Radius $R \in \mathbb{R}_0^+$ rollt zwei Umdrehungen auf einer Ebene, für jede Umdrehung braucht er eine Zeiteinheit. Im Abstand $R/2$ von der Mitte ist ein Punkt $P$ angebracht, welcher anfangs an der tiefst möglichen Stelle ist. Wir nehmen an, dass $P$ fest angebracht ist und mit dem Zylinder rollt.

Welche Kurve beschreibt den Punkt $P$ während des Rollens und wie lang ist der entsprechende Weg, den der Punkt $P$ zurückgelegt? *(Hinweis: Für die explizite Berechnung des*

*Längenintegrals ist die Verwendung eines Computers gestattet.)*

**Aufgabe 4** *(2 Punkte)***:** Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq \left(1 - \frac{2}{3}x\right)^{3/2}$.

a) Zeigen Sie zuerst allgemein, dass für die Länge $L(\gamma_f)$ des Graphen einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt
$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t.$$

b) Geben Sie eine einfach durchlaufende Kurve $\gamma_f\colon \mathbb{R} \to \operatorname{graph}(f) \subset \mathbb{R}^2$ an und berechnen Sie die Länge $L(\gamma_f)$ des Graphen von $f$.

c) Finden Sie nun eine Abbildung $s\colon [0,1] \to [0, L(\gamma_f)]$, sodass $\phi \coloneqq \gamma_f \circ s^{-1}$ die Reparametrisierung ist, die die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft (analog der Eigenzeit in der relativistischen Physik).

**Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 17.11.2021, um 14.00 Uhr.**