Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 5

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ eine Ableitung besitzt (also insbesondere partiell differenzierbar ist), aber nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber die Ableitungen nach x und y nicht vertauschen. Ist $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}f)$ in $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 3 *(3 Punkte)***:** Zeigen Sie, dass folgenden Funktionen f, g, h in ihrem Definitionsbereich total differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitungen:

a) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen, sowie $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x = 0\}$ die Menge der Nullstellen der quadratischen Form $x^T A x$. Definiere dann:

$$f \colon \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^T A x}.$$

b) Sei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Definiere dann

$$g \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = F(\|x\|_2).$$

c) Sei $h \colon (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Diese Abbildung definiert die *Kugelkoordinaten* im $\mathbb{R}^3$. (Für jeden Punkt $x = (r, \vartheta, \varphi)$ liegt $h(x)$ auf der Oberfläche der Kugel mit Radius r.) Sie wird Ihnen im weiteren Verlauf der Vorlesung noch öfter begegnen.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Seien ϕ, θ die Koordinaten auf der Einheitssphäre (wie in Aufgabe 3(c) mit $r = 1$).

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Wege γ_1 entlang des Längenkreises bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ vom Nord- zum Südpol der Einheitssphäre und γ_2 auf der Einheitssphäre, für den in Kugelkoordinaten gilt $\phi = \theta \in [0, \pi]$.

   Veranschaulichen Sie sich jeweils deren Verlauf.

b) Berechnen Sie explizit das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

   der Vektorfelder

$$\mathbf{f}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{f}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x + y \end{pmatrix}$$

   entlang der Wege γ_1 und γ_2 aus Teil (a).

c) Hätten Sie diese Ergebnisse (qualitativ) auch ohne explizite Berechnung des Wegintegrals erwarten können?

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 24.11.2021, um 14.00 Uhr.