Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 6

Für eine partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren wir die Divergenz durch

$$(\operatorname{div} f)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i},$$

wobei die $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen sind. Und für eine partiell differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation durch

$$(\operatorname{rot} g)(x) := \Big(\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3}\Big)\hat{\mathrm{e}}_1 + \Big(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1}\Big)\hat{\mathrm{e}}_2 + \Big(\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2}\Big)\hat{\mathrm{e}}_3,$$

wobei $\hat{\mathrm{e}}_1$, $\hat{\mathrm{e}}_2$ und $\hat{\mathrm{e}}_3$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$ sind.

Außerdem definieren wir den *Nabla-Operator* $\nabla = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathrm{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, womit $\operatorname{grad} h = (\nabla h)^\mathsf{T}$ für differenzierbare Funktionen $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Beachte, dass $\operatorname{grad} h = h'$ eine $1\times n$-Matrix, also ein Zeilenvektor, und ∇h ein Spaltenvektor ist. Wir können dann $\operatorname{div} f = \langle \nabla, f\rangle$ und $\operatorname{rot} g = \nabla \times g$ schreiben.

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sowie $A\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad \text{und} \quad \langle \nabla, \nabla \times A\rangle = 0,$$

nach den obigen Definitionen also

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0.$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$. Zeigen Sie, dass f unendlich viele lokale Maxima aber kein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 3 *(3 Punkte)***:** Betrachten Sie die zweidimensionale Gaußfunktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, sowie für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ die Abbildung $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma_c(t) = (c\cos(t), c\sin(t))$.

a) Fertigen Sie eine Skizze von

$$\operatorname{graph} f = \left\{ \big((x,y), f(x,y)\big) \,:\, x,y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{für} \quad x,y \in [-2,2]$$

zusammen mit den Mengen

$$H_c = \left\{ \big(\gamma_c(t), f(\gamma_c(t))\big) \,:\, t \in [0,2\pi) \right\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{für} \quad c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$$

an.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema von f.

c) Zeigen Sie, dass $\gamma_c'(t)$ für alle c und t senkrecht (bzgl. des Standardskalarprodukts) auf $\operatorname{grad} f(a)$ in $a = \gamma_c(t)$ steht.

Bemerkung: Die Mengen, auf denen f konstant ist (hier die H_c aus (a)), heißen *Höhen-* oder *Nivaulinien* von f. Warum war zu erwarten, dass der Gradient von f senkrecht auf den Höhenlinien steht? (In welche Richtung zeigt der Gradient?)

Aufgabe 4 *(3 Punkte)***:** Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbare Vektorfelder und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein total differenzierbares Skalarfeld. Wir notieren mit $\psi'(x)$ die Ableitungsmatrix einer beliebigen total differenzierbaren Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Produktregeln:

a)

$$(f\phi)'(x) = \phi(x) f'(x) + f(x) \cdot \phi'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Beachten Sie hier, dass der Ausdruck $f(x) \cdot \phi'(x)$ als Produkt der $m{\times}1$-Matrix f (als Vektor im $\mathbb{R}^m$) mit der $1{\times}n$-Matrix $\operatorname{grad}\phi$ eine $m{\times}n$-Matrix ergibt (genauso wie $(f\phi)'(x)$ und $f'(x)$).

b) Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\langle f, g\rangle)'(x) = f^{\mathsf{T}}(x) \cdot g'(x) + g^{\mathsf{T}}(x) \cdot f'(x),$$

mit den Zeilenvektoren f^{T} und g^{T}, die sich durch Transposition der m-dimensionalen Spaltenvektoren f und g ergeben.

c) Seien $m = n$. Zeigen Sie

$$\operatorname{div}(f\phi) = (\operatorname{div} f)\,\phi + \langle f, \nabla\phi \rangle.$$

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 24.11.2021, um 14.00 Uhr.