MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WS 2021/22

Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 7

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Seien $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 = 9\}$ und $f : V \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 - y^3$. Bestimmen Sie lokale und globale Extrema von f in V, sowie diejenigen Stellen in V, an denen die Extrema angenommen werden.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Betrachten Sie die Funktion aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie diesmal die Extrema von f auf der Menge $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 \leq 9\}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass im Inneren von W neue kritische Stellen auftreten können und dass vielleicht manche der Extrema auf dem Rand $\delta W = V$ keine Extrema in W sind.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Der Ausdruck

$$W_N := \frac{N!}{N_1!N_2! \dots N_m!}$$

entspricht der Anzahl der Aufteilungen von N Teilchen auf m Kästen, wenn $\sum_{j=1}^m N_j = N$ gilt. Wenn den Kästen jeweils die Energie E_j zukommt, dann ist $E := \sum_{j=1}^m E_j N_j$ die Gesamtenergie der N Teilchen.

Zeigen Sie, dass am Maximum von W_N, unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^m N_j = N$ und $\sum_{j=1}^m E_j N_j = E$,

$$N_j = Ce^{-\lambda E_j} \tag{1}$$

gilt. Hierbei sind C und λ Konstanten, die durch die Nebenbedingungen bestimmt werden können.

Hinweis: Es soll $N \gg m$ angenommen werden, sodass $N_j \gg 1$ für alle $j = 1, \dots, m$ und näherungsweise die Stirlingformel $N_j! \approx \left(\frac{N_j}{e}\right)^{N_j}$ verwendet werden darf. Dadurch können die N_j als kontinuierliche Variablen behandelt werden. Minimieren Sie dann $\ln W_N$ statt W_N.

Bemerkung: Der Parameter λ in Formel (1) erhält durch den Zusammenhang mit der Thermodynamik eine physikalische Bedeutung. Dort ist $\lambda = \frac{1}{kT}$, mit der Boltzmannkonstante k und der Temperatur T .

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y) = y^3 + y + x^4 + x^2$. Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine eindeutige Abbildung $g : U \to V$ existieren, sodass $F(x, g(x)) = 0$. Plotten Sie den Graphen der Funktion F zusammen mit der Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 0$ um die Nullstellenmenge von F zu visualisieren.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 08.12.2021, um 14.00 Uhr.