Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 8

Bemerkung: In der Vorlesung wurde der Banachsche Fixpunktsatz für Funktionen im $\mathbb{R}^n$ definiert. Er gilt ebenso auf vollständigen normierten Räumen $\mathcal{V}$ und Kontraktionen $F : \mathcal{V} \supset \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$. Dies darf auf diesem Übingsblatt verwendet werden.

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:**

Zeigen Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes: Es existiert genau eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(f(x))$$

für alle $x \in [0,1]$ genügt.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto (x \mapsto x+\frac{1}{2}\sin(f(x)))$. Sie können hier ohne Beweis verwenden, dass $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger normierter Raum ist.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Wie üblich sei $\mathbb{R}$ durch den Betrag metrisiert. Betrachtet wird die Teilmenge $[3,5] \subseteq \mathbb{R}$, versehen mit der induzierten Metrik, sowie die Funktion $\varphi : [3,5] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = 3 + \arctan x$.

Untersuchen Sie, ob

a) die Funktion φ eine Kontraktion darstellt;

b) die Inklusion $\varphi([3,5]) \subseteq [3,5]$ besteht;

c) der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar ist;

d) die Funktion φ in $[3,5]$ Fixpunkte hat.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \log(1 + \exp(x))$$

und zeigen Sie: f erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

aber f besitzt keinen Fixpunkt.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren: Unter allen Vierecken mit den gegebenen Seiten a, b, c, d (der Reihenfolge nach gegen den Uhrzeigersinn) hat das Sehnenviereck (d.h. das Viereck, bei dem die Eckpunkte auf einen Kreis liegen) die größte Fläche.

Hinweis: Betrachten Sie die beiden Dreiecke mit den Seiten a, b und Zwischenwinkel α bzw. c, d und Zwischenwinkel β. Welche Nebenbedingung müssen α und β erfüllen, damit die beiden Dreiecke ein Viereck bilden? Maximieren Sie die gemeinsame Fläche der beiden Dreiecke unter der gefundenen Nebenbedingung.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 15.12.2021, um 14.00 Uhr.