MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WS 2021/22

Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 9

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x > y^2$.

a) Entwickeln Sie f um den Entwicklungspunkt $(1,0)$ bis zur zweiten Ordnung, d.h. bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2^{(1,0)}(x,y)$ der Funktion f.

b) Seien $|x-1|, |y| < \frac{1}{10}$. Zeigen Sie:

$$\left| P_2^{(1,0)}(x,y) - f(x,y) \right| < \frac{1}{1000}.$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Geben Sie die Taylorrreihe von

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \qquad \text{für } \|x\| < 1$$

an. Ist die Taylorreihe für $\|x\| < 1$ konvergent?

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie $f(x,y)$ in der Form $g(x) \cdot g(y)$ schreiben können.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Bestimmen Sie die Lösung und ihr Definitionsbereich des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{xy - 1}{1 - x^2}, \qquad y(0) = 0,$$

wobei $x \in (-1, 1)$ und y eine reellwertige Funktion ist.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi :]1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) := \frac{\ln x}{x},$$

eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(x,y), \qquad f :]1,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{\ln x}$$

darstellt.

b) Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems und überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung durch Einsetzen und Differenzieren:

$$y' = -\frac{2xy}{1+x^2}, \qquad y(0) = 2.$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass bei Ihrer Bearbeitung klar wird, welche Methode aus der Vorlesung verwendet wurde, und, dass ein geeigneter Definitionsbereich der Lösung angegeben wird.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 22.12.2021, um 14.00 Uhr.