Skript zur Vorlesung Analysis 2 bei Dr. Peter Pickl im Wintersemester 2021/22

Malik Jirasek

Wintersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung aus Analysis 1

1.1 Konvergenz

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$
$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - a| < \epsilon \;\; \forall k \geq n.$

Alles, was man nun für eine Verallgemeinerung benötigt, ist ein geeigneter Abstandsbegriff.

Definition: (Metrik) Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Metrik
$:\Leftrightarrow$ *a)* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positive Definitheit)
b) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecks-Ungleichung).

Definition: Sei M ein metrischer Raum, d.h. eine Menge, auf der eine Metrik d definiert ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge, $a \in M$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a
$:\Leftrightarrow \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} : \;\; d(a_k, a) < \epsilon \;\; k \geq n.$

Bemerkung: Die Konvergenzeigenschaft hängt vom Abstandsbegriff ab. Wenn man zwei verschiedene Metriken d_1 und d_2 hat, kann es sein, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. d_1 konvergiert, bzgl. d_2 aber nicht. Wenn wir über Konvergenz einer Folge sprechen, müssen wir also dazu sagen, welcher Abstandsbegriff gemeint ist. (In endlich dimensionalen VR wird das schöner, siehe später.)

Satz: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
$\Rightarrow \;\; \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ (Annahme: M ist VR. d.h. $a_n + b_n$ ist definiert)
Beweis: Sei $\epsilon > 0$:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \;\; \Rightarrow \;\; \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_k, a) < \delta \;\; \forall k \geq n_0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b \;\Rightarrow\; \forall \eta > 0 \;\exists n_1 \in \mathbb{N} : d(b_k, b) < \eta \;\; \forall k \geq n_1$

Wir nehmen nun an, dass d aus einer Norm kommt.

$(d(a_k + b_k, a + b) = ||a_k + b_k - (a + b)||$ siehe Lineare Algebra 1)

$\Rightarrow d(a_k + b_k, a + b) = ||a_k + b_k - a - b|| \leq ||a_k - a|| + ||b_k - b|| \leq \delta + \eta$

Falls $k \geq \max\{n_0, n_1\}$, wähle $\delta = \eta = \frac{\epsilon}{2} \;\Rightarrow\; d(a_k + b_k, a + b) \leq \epsilon$

$\forall k \geq n \, (n = \max\{n_0, n_1\})$

Beispiel: Sei M eine Menge, $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & sonst. \end{cases}$$

Dies erfüllt offensichtlich die Axiome a), b) und c) einer Metrik.

Betrachte nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (bzgl. d). Das bedeutet, dass a_n irgendwann konstant bleibt, d.h. $\exists n \in \mathbb{N} : \;\; a_k = a \;\; \forall k \geq n$. Wähle $M = \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (bzgl. $|\cdot|$)

Bemerkung:: Im Folgenden werden Abstandsbegriffe gewählt, die aus einer Norm hervorgehen, d.h. $d(x,y) = \|x - y\|$.

Beispiel: Sei S die Menge aller stetiger Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Diese Menge ist ein VR. Betrachte folgende Normen:

$\|\cdot\|_1 : \;\; S \to \mathbb{R}_0^+ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$

$\|\cdot\|_\infty : S \to \mathbb{R}_0^+ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$

Damit folgt:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ und f_n starte bei $f_n(0) = 1$, fällt dann auf $f_n(\frac{1}{n}) = 0$ und bleibt danach auf 0. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} f_n$ bzgl. d_∞ nicht in S. Bzgl. d_1 gilt

$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, da:

$$\int_0^1 |f_n - 0|dx = \int_0^1 |f_n|dx \quad \longrightarrow^{n\to\infty} 0$$

Aber $\sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\} = 1$ für alle n.

Man sieht also,dass, selbst wenn man unstetige Funktionen zulässt, sich nicht bzgl. d_∞ ein Limes finden lässt.

Bemerkung: Selbst wenn man sich auf Normen beschränkt, ist der Abstandsbegriff u.U. entscheidend darüber, ob Konvergenz gilt oder nicht.

Definition: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ heißen äquivalent

$:\Leftrightarrow \exists c, K \in \mathbb{R}^+ :$

$\|x\|_a \leq K\|x\|_b \;\; \forall x \in V$

$\|x\|_b \geq c\|x\|_b \;\; \forall x \in V$

Satz: Obige Definition ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

a) $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$ ist klar

b) $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b \Rightarrow \|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_a$

$\|x\|_a \leq K\|x\|_b \Rightarrow \frac{1}{K}\|x\|_a \leq \|x\|_b$

$\|x\|_a \geq c\|x\|_b \Rightarrow \frac{1}{c}\|x\|_a \geq \|x\|_b$

c) $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$ und $\|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_c \Rightarrow \|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_c$

$\|x\|_a \leq K\|x\|_b$ und $\|x\|_b \leq \tilde{K}\|x\|_c \Leftrightarrow \|x\|_a \leq K\tilde{K}\|x\|_c$

Satz: Falls V endliche Dimension hat, sind alle Normen auf V zueinander äquivalent.

Konsequenz: Für zwei äquivalente Normen ist die Entscheidung, ob eine Folge konvergiert oder nicht, immer gleich.

Betrachte: $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$

Annahme: bzgl. $\|\cdot\|_a : \lim_{n\to\infty} x_n = x$, d.h. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} : \|x_k - x\|_a < \epsilon \;\; \forall k \geq n$

Gilt dann $\forall \eta > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : \|x_k - x\|_b < \eta \;\; \forall k \geq m$?

Antwort: $\|x_k - x\|_b \leq \frac{1}{c}\|x_k - x\|_a < \frac{\epsilon}{c}$, wähle $\epsilon = c\eta$.

Im endlich dimensionalen gilt, dass die Konvergenzeigenschaft in diesem Sinne absolut ist, d.h. man muss nicht die entsprechende Norm nennen.

Folgerung: $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$

Im Folgenden wird gezeigt, dass für endlich dimensionale VR jede Norm äquivalent ist zur $\|\cdot\|_1$. Diese ist gegeben durch:

Sei V VR, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis. $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$, wobei $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$.

1.2 Stetigkeit

Definition: Sei $f : M \to N$. f heißt stetig im Punkt $x \in M$ bzgl. der Metriken d_M, d_N.

$:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

bzw.: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

Beispiele:

a) $f(x) = x$ ist eine stetige Funktion, falls man je den selben Abstandsbegriff verwendet.

b) $f(x) = Ax$ wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M(n \times n)$ ist immer stetig.

c) $f(x,y) = x^2 \cdot y \;\; x, y \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Satz: Sei V ein endlich dimensionaler VR, $\|\cdot\| : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige Norm, Dann ist $\|\cdot\|$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_1$.

Beweis: Sei $f(x) = \|x\|$:

1. Schritt: Formel $\exists K \in \mathbb{R}^+$ so, dass: $x\| \leq K\|x\|_1$:

$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j e_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_j e_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x|\|e_j\|$

Wähle nun $K = \max\limits_{j\in\{1,...,n\}} \{\|e_j\|\}$, dann folgt:

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |x|\|e_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot K = K \cdot \|x\|$

2. Schritt: Beweis der Stetigkeit Formel: $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\|$ (direkt aus $\triangle$-Ungl.)

Für uns: $|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\| \leq c\|x-y\|_1$

Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, so folgt:

$\forall \epsilon > 0: \;\; |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, falls $\|x-y\|_1 < \delta$

Bemerkung: Wenn dann die Äquivalenz aller Normen gezeigt ist, gilt für endlich dimensionale VR: Jede Norm ist stetig bzgl. jeder anderen Norm.

<u>Satz:</u> Sei V ein endlich dimensionaler VR. $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V, \;\; a \in V$ (bzgl. $\|\cdot\|$ $\;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$

<u>Beweis:</u> $|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| \;\; \to 0$ nach VS.

<u>Satz:</u> (Bolzano-Weierstraß) Sei V ein endlich dimensionaler VR. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_1$, d.h. $\exists C > 0$ mit: $\|a_n\|_1 < C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Beweis:</u> $a_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d)$ Nach Analysis 1 Version von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die erste Koordinate konvergiert: $\lim\limits_{k\to\infty} a^1_{n(k)} = a^1$.

Nach Analysis 1 Version von B.W. gibt es eine Teilfolge hiervon, so dass auch die zweitze Koordinate konvergiert.

...

$\Rightarrow \exists n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend, so dass $\forall j \in \{1 \ldots d\}$ gilt:

$\lim\limits_{k\to\infty} a^j_{n(k)} = a^j$ für entsprechendes $a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \|a_n - a\|_1 = \sum_{j=1}^d |a^j_{n(k)} - a^j| \to 0$ für $k \to \infty$.

$\lim\limits_{k\to\infty} \|a_{n(k)} - a\|_1 = 0$ bzw. $\forall \epsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \;\|a_{n(k)} - a\|_1 < \epsilon \, \forall k \geq m$

Bemerkung: Wenn die Äquivalenz der Normen bewiesen ist, folgt die Gültigkeit des Satzes bzgl. einer beliebigen Norm:

$\lim\limits_{k\to\infty} \|a_{n(k)} - a\|_1 = 0 \underset{(\ddot{A}.d.N)}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} \|a_{n(k)} - a\| = 0$

<u>Beweis des Satzes der Äquivalenz aller Normen auf endlichen Vektorräumen:</u>

Sei $\|\cdot\|$ Norm auf V. Wir haben bereits $\|\cdot\| < c\|\cdot\|_1$. Es bleibt zu zeigen: $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \|\cdot\| \geq K\|\cdot\|_1$

Widerspruchsannahme: $\forall K > 0 \, \exists x : \; \|x\| < K\|x\|_1$

insbesondere $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n : \|x_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|_1, x_n \neq 0$.
Wir wählen $\|x_n\|_1 = a_n$, sei $y_n = \frac{x_n}{a_n} \Rightarrow \|y_n\| < \frac{1}{n}\|y_n\|_1 = \frac{1}{n}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$,
außerdem gilt nach B.W.: $\exists n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)}$ existiert bzgl. $\|\cdot\|_1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \|y_{n(k)}\| = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = y$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|y_{n(k)}\|_1 = \|y\|_1 = 1$
insbesondere $y \neq 0$!. Wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|$ bzgl. $\|\cdot\|_1$: $\|\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)}\| = 0$,
d.h. $\|y\| = 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch!

Bemerkung: Wir werden Eigenschaften, die von einem Abstandsbegriff abhängen, in Fällen, bei denen für äquivalente Normen kein Unterschied besteht, in endlich dimensionalen VR die Norm nicht nennen: "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ ist konvergent"

1.3 Topologie

Im Folgenden werden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ betrachtet.
Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein Element $x \in M$ heißt innerer Punkt (von M)
$:\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$, so dass $y \in M \, \forall y : \|x-y\|_2 < \epsilon$ (Wegen der Äquivalenz der Normen kann hier auch jede andere Norm gewählt werden.)
Ein $x \notin M$ heißt äußerer Punkt
$:\Leftrightarrow x$ ist innerer Punkt von M^c (Komplement von M)
Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt (von M)
$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ gilt: $\exists y \in M$ und $\exists z \in M^c$,
so dass $\|x-y\|_2 < \epsilon$ und $\|x-z\|_2 < \epsilon$

Satz: Sei $x \in \mathbb{R}^n$: Ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist entweder innerer Punkt oder äußerer Punkt oder Randpunkt von M. (hier: exklusives oder)
Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ kein Randpunkt
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0$: entweder $\forall y : \|x-y\|_2 < \epsilon : y \notin M$ bzw. $y \in M^c$
oder $\forall y : \|x-y\|_2 < \epsilon : y \notin M^c$ bzw. $y \in M$

Das bedeutet, x ist entweder äußerer Punkt oder innerer Punkt. Es gibt also keine vierte Alternative zu innerer, äußerer, Randpunkt. Die drei Eigenschaften schließen jeweils die anderen aus.

Beispiel: offener Ball um m mit Radius r:

$B_m(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - m\|_2 < r\}$

Jedes $x \in B_m(r)$ ist innerer Punkt (wähle $\epsilon := \frac{r - \|x-m\|_2}{2}$.

Jedes x mit $\|x - m\|_2 > r$ ist äußerer Punkt.

Jedes x mit $\|x - m\|_2 = r$ ist Randpunkt.

Definition: Sei $M \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $\overset{\circ}{M}$, die nur aus inneren Punkten von M besteht, nennt man Inneres von M.

$\overset{\circ}{M} : \{x \in M : x\, ist\, innerer\, Punkt\}$

Analog ist der Rand von $M : \delta M$ die Menge aller Randpunkte und das Äußere $\overset{\circ}{M^c}$ definiert. Die Vereinigung von M mit seinem Rand δM nennt man Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von M,

$\overline{M} := M \cup \delta M.$

Definition: Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls sie nur aus inneren Punkten besteht: $M = \overset{\circ}{M}$.

Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls M^c offen ist.

Beispiel: a) $M = \mathbb{Q} \cap [0,\, 1] \subset \mathbb{R}$

Das Innere der Menge ist leer. Für jedes $x \in M$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine irrationale Zahl y mit $\|x - y\|_2 < \epsilon$. Für jedes $x \in [0,\, 1]$ und jedes $\epsilon > 0\, \exists z \in M,\, y \in M^c$ mit $\|x - z\|_2 < \epsilon$ sowie $\|x - y\|_2 < \epsilon$. Jedes $x \in [0,\, 1]$ ist also Randpunkt von M. M ist weder offen noch abgeschlossen: M^c hat Punkte, die keinen innere Punkte sind, z.B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Der offene Ball im obigen Beispiel ist offen im Sinne der Definition. Der Rand ist der Kreisring mit Radius 1.

Bemerkung: $\delta M \cap \overset{\circ}{M} = \emptyset$

$\delta M \cap \overline{M} = \delta M$

Für abgeschlossene Mengen gilt: $\delta M \subset M$.

Bemerkung: Die obigen Definitionen lasen sich direkt auf metrische Räume, d.h. Räume mit einer Metrik verallgemeinern.

<u>Satz:</u> Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, dann gilt $\forall U \subset X$ offen mit $a \in U$: alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen in U.

$(|\{n \in \mathbb{N}\} : a_n \in U| < \infty)$

<u>Beweis:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sei $U \subset V$ offen mit $a \in U$. Da U offen $\exists \epsilon > 0$, so dass:

$B_a(\epsilon) \subset U$, d.h. $\{y \in X : d(a, y) < \epsilon\} \subset U$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $d(a_k, y) < \epsilon \, \forall k \geq n$ d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a_k \in U \, \forall k \geq n$

$\Rightarrow |\{k \in \mathbb{N} : a_k \not\in U\}| \leq n - 1 < \infty$

<u>Satz:</u> Auch die Umkehrung gilt.

<u>Beweis:</u> Sei $a \in X$, $\forall U \subset X$ offen mit $a \in U$ seien höchstens endlich viele Folgenglieder nicht in U.

Insbesondere: $|\{k \in \mathbb{N} : d(a, a_k) \geq \epsilon\}| < \infty$ (da $\{d(a, y) < \epsilon\}$ offen)

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists n$ in $\mathbb{N} : d(a, a_k) < \epsilon \, \forall k \geq n$.

<u>Satz:</u> Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen geben offene Mengen.

"Gegenbeispiel": Falls wir z.B. abzählbare Schnitte betrachten, kann das Ergebnis eine nicht offene Menge sein.

$U_n :=]-1, \frac{1}{n}[$ sind alle offen.

$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n =]-1, 0]$

(jedes $\epsilon > 0$ fliegt beim Schneiden irgendwann raus. Wähle n, so dass

$\frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \epsilon \not\in U_n$)

<u>Beweis:</u> Sei $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ mit A_i offen. Sei $x \in A \Rightarrow \exists i \in I$ mit $x \in A_i \overset{A_i\, offen}{\Rightarrow}$

$\exists \epsilon > 0$ mit $B_x(\epsilon) \subset A_i$

$\Rightarrow B_x(\epsilon) \subset A \Rightarrow A$ ist offen.

Sei I endlich. o.B.d.A. $I = \{1, 2\}$:
A_1, A_2 offen, $A := A_1 \cap A_2$
Sei $x \in A \Rightarrow x \in A_1$ und $x \in A_2 \overset{A_i\, offen}{\Rightarrow} \exists \epsilon_1$ mit $B_x(\epsilon_1) \subset A_1$, $\exists \epsilon_2$ mit $B_x(\epsilon_2) \subset A_2$
Wähle $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann gilt $B_x(\epsilon) \subset A_1$ und $B_x(\epsilon) \subset A_2 \Rightarrow B_x(\epsilon) \subset A$

Satz: Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen ergeben abgeschlossene Mengen.
Beweis: Bei Bildung des Komplements werden aus Vereinigungen Schnitte und umgekehrt: $\cup A_i = ((\cup A_i)^c)^c = (\cap A_i)^c$ ($\cap A_i$ ist offen)
...

Satz: Sei $A \subset X$ eine Teilmenge von X. A ist genau dann abgeschlossen, falls jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ auch ihren Limes in A hat.
Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $A \subset X$ abgeschlossen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$
z.z.: $a \in A$
W.A.: $a \not\in A \Rightarrow a$ ist äußerer Punkt (A^c offen). Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall U$ offen mit $a \in U$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in U. Wähle U so, dass $U \subset A^c$, z.B. $U = B_a(\epsilon)$ mit entsprechendem ϵ.
1) Alle Folgenglieder sind in A.
2) Alle bis auf endlich viele Folgenglieder sind in $U \subset A^c$.
$\rightarrow$ Widerspruch!
"$\Leftarrow$": Für jede konvergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gelte, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in A$
z.z.: A ist offen.
W.A.: A ist nicht abgeschlossen bzw. A^c ist nicht offen.
$\Rightarrow \exists x \in A^c$ mit x ist kein innerer Punkt von A^c, d.h. $\forall \epsilon > 0 : \exists y \not\in A^c$ mit $d(x, y) < \epsilon$
Wähle y_n als das entsprechende y für $\epsilon = \frac{1}{n}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $x \not\in A \rightarrow$ Widerspruch!

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt kompakt

:$\Leftrightarrow$ Jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge: $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ gilt:

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} \in K$ für ein $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton.

Satz: Eine kompakte Menge ist natürlich abgeschlossen.

Exkurs (Alternative Definition): Eine Menge K heißt kompakt :$\Leftrightarrow$ Jede Überdeckung von K mit offenen Mengen hat endliche Teilbedeckungen, d.h.:

$\bigcup\limits_{i\in I} U_i \supset K \Rightarrow \exists J \in I$ mit $|J| < \infty$, so dass $\bigcup\limits_{i\in J} U_i \supset K$.

Satz: Sei V endlich dim. VR, dann ist $K \subset V$ kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": K kompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen ist klar. Wäre K nicht abgeschlossen, könnte man eine "divergente Folge"definieren:

W.A.: K nicht beschränkt $\Rightarrow$ $\forall C\ \exists x \in K$ mit $\|x\|_2 \geq C$. Wähle x_n so, dass $\|x_1\| > n$. Diese Folge konvergiert nicht, auch keine Teilfolge davon

$\Rightarrow$ Widerspruch zu K kompakt.

Satz: $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ X ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei X beschränkt und abgeschlossen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, nach Bolzano-Weierstras hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da X abgeschlossen ist, liegt der Limes der Teilfolge in X.

Beispiel: Sei F die Menge aller Folgen reeller Zahlen.

$||\alpha - \beta||_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n - b_n|\}$, $\alpha = (a_1, a_2, ...)$, $\beta = (b_1, b_2, ...)$

$||\alpha||_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

(Überprüfung der Normeigenschften ist straight-forward)

Sei $X \subset F :\ \alpha \in X\ :\Leftrightarrow ||\alpha||_\infty \leq 1$.

X ist offensichtlich beschränkt (mit $C = 1$). X ist auch abgeschlossen. Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bzgl. $||\cdot||_\infty$ konvergiert.

$\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha$

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \leq 1$ warum?

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $\alpha^n = \lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j^n$ $(|\alpha^n - \alpha_j^n| \leq \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|\alpha^n - \alpha_j^n|\})$

$|\alpha_j^n| \leq 1$ für alle j, $n \Rightarrow |\alpha^n| \leq 1 \Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha^n| \leq 1$

Betrachte: $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X \;:\Leftrightarrow \alpha_j^j = 1;\; \alpha_j^n = 0$ falls $j \neq n$

$||\alpha_j - \alpha_k||_\infty = 1$, falls $j \neq k$ Man findet keine Teilfolge, die konvergiert. $\Rightarrow X$ ist nicht kompakt.

<u>Definition:</u> Eine Teilmenge $X \subset M$ eines metrischen Raumes heißt wegzusammenhängend

$:\Leftrightarrow \forall a$, $b \in X$ gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

<u>Satz:</u> (Zwischenwertsatz) Sei X wegzusammenhängend (z.B. ein Intervall in Ana. 1), $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. In M benutzt man den Abstandsbegriff der X wegzusammenhängend macht. Dann gilt:

$\forall a, b \in X$ und alle $z \in [f(a); f(b)]$ bzw. $z \in [f(b); f(a)]$ gibt es ein $c \in X$ mit $f(c) = z$.

<u>Beweis:</u> Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

Sei $g := f \circ \gamma$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$c = \gamma(\zeta)$, der Zwischenwertsatz aus Ana. 1 liefert, dass ein $\zeta \in [0,1]$ existiert mit $g(\zeta) = z$. Wähle $c = \gamma(\zeta)$

<u>Definition:</u> Ein topologischer Raum M heißt zusammenhängend

$:\Leftrightarrow M$ kann nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener, nicht leerer Mengen geschrieben werden.

Eine Menge X (Teilmenge eines topologischen Raumes) heißt nicht zusammenhängend

$:\Leftrightarrow \exists U, V$ disjunkt und offen mit

a) $X \subset U \cup V$

b) $X \cap U \neq \emptyset,\ X \cap V \neq \emptyset$.

Satz: Wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend (bzgl. des selben Abstandsbegriffs)

Beweis: Sei X wegzusammenhängend

W.A.: X ist nicht zusammenhängend.

$\Rightarrow \exists U, V$ disjunkt und offen mit $X \subset U \cup V$, $X \cap U \neq \emptyset$, $X \cap V \neq \emptyset$

Sei $a \in X \cap U$ und $b \in X \cap V$. Da X wegzus. $\exists \gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$

Betrachte: $\{t \in [0,1] : \gamma(t) \subset U\} = A$

A ist abgeschlossen. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergent $\Rightarrow \gamma(t_n) \in V^c \, \forall n \in \mathbb{N}$ $(U, V$ disjunkt).

$\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n)$ existiert wegen Stetigkeit von γ, er liegt in V^c, da V^c abgeschlossen.
$X \subset U \cup V \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n) \in U \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} t_n \in A$.

$\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in U\} := A$ ist abgeschlossen, $\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in V\} := B$ ist abgeschlossen.

$[0,1] = A \cup B \to$ Widerspruch zu $([0,1] \cap B)^c = A \cup [0,1]^c$ ist offen.

Satz: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, (Abstandsbegriff aus $||\cdot||$) X zusammenhängend $\Rightarrow X$ wegzusammenhängend.

Beweis: $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend. Seien $a, b \in X$.

$A := \{c \in X$ mit: $\exists \gamma : [0,1]$ stetig: $\gamma(0) = a, \gamma(1) = c\}$

$B := \{c \in X$ mit: $\exists \gamma : [0,1]$ stetig: $\gamma(0) = b, \gamma(1) = c\}$

Falls $c \in A \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_c(\epsilon) \subset X$, ($X$ offen). Da sich jedes Element im Ball mit stetigem Pfad erreichen lässt $\Rightarrow B_c(\epsilon) \subset A \Rightarrow A$ offen und B offen.

Betrachte die Menge $M := \bigcup\limits_{\substack{x \notin A \\ x \in X}} \{y \in X : \exists$ Weg von x nach $y\}$

M ist disjunkt zu A!

Falls $\exists c \in A$, $c \in X \Rightarrow \exists$ Weg von a nach c und von c nach $x \in A^c$

$\Rightarrow \exists$ Weg von a nach $x \in A^c$, $\rightarrow$ Widerspruch!

M ist als Vereinigung offener Mengen offen. A ist nicht leer. Da X zusammenhängend

$\Rightarrow \nexists A, B$ offen, disjunkt, nicht leer mit $X \subset A \cup B$!

$\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow b \in A$, q.e.d.

1.4 Vollständigkeit

Ana 1: Vollständigkeit ist ähnlich wie Lückenlosigkeit einer Menge.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ in einem metrischen Raum (M, d) heißt Cauchy-Folge

$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : d(a_m, a_k) < \epsilon \, \forall k, m \geq N$

Der Raum M heißt volländig

$:\Leftrightarrow$ jede CF von M konvergiert.

Satz: Jede konvergente Folge ist CF. (bzgl. d!)

Beweis: Analog zu Ana. 1

Satz: Falls (M, d) vollständig und $X \subset M$ abgeschlossen, so ist (X, d) ebenfalls vollständig.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine CF. Da $X \subset M$ und M vollständig, existiert der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in M$. Da X abgeschlossen, liegt dieser auch in X.

Bemerkung: Es gilt auch die Rückrichtung, d.h. volländig $\Rightarrow$ abgeschlossen.

{ geg.: (M, d) vollst.: $X \subset M$ vollst. $\Rightarrow X$ abgeschlossen. } Bemerkung: Bzgl. Abstandsbegriffen, die von Normen induziert werden, ist jeder endlich dim. Vektorraum vollständig.

Dazu betrachte die $\|\cdot\|_1$-Norm. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ CF ist, so ist jede Koordinate eine CF.

$\|a_m - a_k\| = \sum_{j=1}^{D} |\lambda_m^j - \lambda_k^j|\, (a_m = \sum_{j=1}^{D} \lambda_m^j b_j)$

$\Rightarrow |\lambda_m^j - \lambda_k^j| \leq \|a_m - a_k\|_1$

Für jedes $j \in \{1...D\}$ gilt also: $(\lambda_m^j)_m m \in \mathbb{N}$ ist CF. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert frü jede Koordinate der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^j = \lambda^j \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} = (\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^D)$

1.4.1 Stetigkeit:

Seien (M, d_1), (N, d_2) metrischer Raum, die Stetigkeit haben wir bereits definiert. Falls N, M ein VR, d von einer Norm induziert, dann gilt:

Falls f, g stetig $\Rightarrow f + g$ stetig, $f - g$ ebenso

f, g stetig $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty})$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(x) + g(x)$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Satz: Ebenso gilt: λf ist stetig, falls f stetig $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Die Komposition stetiger Funktionen $f \circ g$ mit:

$f: M_1 \to M_2$, $g: M_0 \to M_1$, (M_0, d_0), (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume

ist stetig.

Beweis: Sei $O \subset M_2$ offen $\Rightarrow f^{-1}(O)$ ist offen, weil f stetig

$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(O))$ ist offen, weil g stetig. q.e.d.

Definition: Eine Funktion $f: V \to W$ seien VR, heißt gleichmäßig stetig

$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0$ so dass $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$, falls $\|x - y\| < \delta$.

Die entsprechende Definition wählt man auch, falls der Def.Bereich von f Teilmengen von V (x, y auf Def.Bereich) (geht auch für metrische Räume, Abstandsbegriff entscheidend)

Der Unterschied zur normalen Stetigkeit ist, dass x nicht festgehalten wird. Man muss δ finden, welches für alle x im Def.Bereich gleichzeitig ergibt, dass $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

Satz: Eine auf kompakten Menge stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Sei $D \subset V$, V ist Vektorraum. $f: D \to W$ stetig, außerdem D kompakt z.z.: f ist glm. stetig.

W.A.: f ist nicht glm. stetig, d.h.
$\exists \epsilon > 0 \, \forall \delta > 0 : \exists x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$ so dass $\|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon$
Wähle $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Die entsprechenden x, y nennen wir x_n und y_n.
$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ und $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon$
D ist kompakt $\Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n(k)} = x \in D$.
Da $\|x_n - y_n\| \to 0$ ist auch $(y_{n(k)})_{k\to\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = x$.
Da f stetig ($x \in D$!) gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n(k)}) = f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n(k)})$
$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)}) = 0$
Aber $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})\| \geq \epsilon$
$\Rightarrow$ Widerspruch

1.5 Kurven im $\mathbb{R}^n$:

Ana 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir werden in Ana. 2 Verallgemeinerungen betrachten, d.h. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition: Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stetig, I sei ein Intervallen in $\mathbb{R}$. Dann nennt man γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in I \text{ mit } \gamma(t) = x\}$ Spur der Kurve.

Definition: Sei γ eine Kurve, $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $I0[a, b]$, $t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_k = b$ eine Unterteilung.
$L(\gamma) := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{\sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2\}$ heißt Länge von γ. Falls $L < \infty$ heißt γ rektifizierbar. Falls $\gamma]a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist $L(\gamma) := \lim\limits_{\epsilon\to 0} L(\gamma|_{[a+\epsilon,b]})$, etc.

Satz: Sei $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar $\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$.

Bemerkung: γ ist stetig diffbar, falls jede Komponente stetig deiffbar ist. $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', ...)$ falls $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ...)$.

<u>Beweis:</u> <u>1. Schritt:</u> Da γ' auf $[a, b]$ stetig, ist γ' auf $[a, b]$ glm. stetig.

$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ so dass in jedem Intervall der Länge δ γ' höchstens um ϵ variiert.

D.h. $a = t_0 < t_1 = t_0 + \delta < ... < t_k = b$ und $|t_j - t_{j-1}| \leq \delta$.

Es gilt: $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\|_2 < \epsilon$, falls $t_{j-1} \leq s < t \leq t_j$

<u>2. Schritt:</u> Wir möchten $L(\gamma)$ mit $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$ vergleichen.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass wir nur Unterteilungen mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ haben.

$L(\gamma) = \sup\{\sum_j \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|\}$

Wir vergleichen nun $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|_2 dt$ mit $\|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_j)\|_2$.

Wegen MWS $\exists s \in [t_{j-,t_j]}$, so dass $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|_2 dt = \|\gamma'(s)\|_2 \cdot (t_j - t_{j-1})$,

dies vergleichen wir mit $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \overset{HS}{=} \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt\|_2$, wobei der Hauptsatz komponentenweise angewandt wird.

$\left| \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \|_2 - \|\gamma'(s)\|_2 (t_j - t_{j-1}) \right| = \left| \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt\|_2 - \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s) dt\|_2 \right|$

$\leq \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s) dt \|_2 = \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) - \gamma'(s) dt \|_2$

$\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\|_2 dt \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \epsilon dt$

Insgesamt ist die Differenz der Länge des Polygonzugs und $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$ gleich $(b - a)\epsilon$. Dies Gilt für beliebiges $\epsilon > 0$, daher kommt die Gleichheit.

Bemerkung: Das Integral existiert immer, da das Integral stetig ist.

Bemerkung: Zwei unterschiedliche Kurven, die injektiv sind und die selbe Spur haben, sind gleich lang. Betrachte eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv. Sei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig diffbar und injektiv. Dann hat die Kurve $\lambda : [c, d] \to \mathbb{R}n$ geg. durch $\lambda(t) = (\gamma \circ \varphi)(t)$ die selbe Spur und Länge wie γ.

$\int_c^d \|\lambda'(t)\|_2 dt = \int_c^d \|\gamma(\varphi(t))'\|_2 dt = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(t))\|_2 \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)=a}^{\varphi(d)=b} \|\gamma'(s)\|_2 ds.$

<u>Definition:</u> So ein φ nennt man auch Umparametririerung der Kurve.

<u>Beispiel:</u> $(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|(-\sin(t), \cos(t), t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} dt$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$
$\lambda(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 2\pi t),\ t \in [0,1]$
$L(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t) + 4\pi^2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$

Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig diffbare Kurve. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennt man $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|_2 dt$ Integral erster Art.

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f stetig, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar.
Man nennt: $\int_a^b < f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$ Integral 2. Art oder Arbeitsintegral.
Bemerkung: Die Integrale (Kurvenintegral, Integral 1. und 2. Art) sind wohldefiniert, da die Integranden stetig sind. (Skalarptodukt ist stetig da: $< v + \delta, w > = < v, w > + < \delta, w > \leq \|\delta\|\|w\|$

Beispiel: Arbeitsintegral $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = x \cdot |x|$, $\gamma :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = \vec{a}t,\ \vec{a} \in \mathbb{R}^2$
$\int_0^1 < \vec{a} \cdot t \cdot |\vec{a}| \cdot t,\ \vec{a} > \ dt \ = \ \|\vec{a}\|_2^3 \cdot \int_0^1 t^2\, dt \ = \ \|\vec{a}\|_2^3 \frac{1}{3}$

Satz: Falls die Kurven injektiv sind, sind Länge und Integrale 1. und 2. Art von der Parametrisierung unabhängig, d.h. unterschiedliche Kurven mit der selben Spur haben das selbe Integral (außer das Vorzeichen).
Beweis: $\int_a^b < f(\gamma(\varphi(t))), \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) > \ dt \underset{Subst.}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} < f(\lambda(t)), \lambda'(t) > \ dt$
(1. Art analog)

Frage: Hängen die Integrale vom gewählten Weg oder evtl. nur von Anfangs- und Endpunkt ab, i.A. JA!

Definition: Ein Integral 2. Art heißt wegunabhöngig, falls der Wert nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt. In diesem Fall lässt sich eine Stammfunktion definieren (nennt man auch Potential), d.h. $\int_a^b \ < \ f(\gamma(t)), \gamma'(t) \ > \ dt \ =$

$V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$.

Beispiel: Wegabhängig sind Integrale für $f(x) = f((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|_2^2}$

Bemerkung: Falls wir von injektiv sprechen, ist es ausreichend wenn dies bis auf endlich viele Pukte gilt. Wegunabhängig $\Leftrightarrow$ geschlossene Wege ergeben Integral 0.

1.6 Differenzierbarkeit (für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar

$:\Leftrightarrow \exists$Matrix $f'(a) \in M(1 \times n)$, so dass:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h\|}{\|h\|} = 0$

Beispiel: $f(x) =< x, x >$, $a = (1, 0)$

$f(a + h) =< a + h, a + h >=< a, a > +2 < a, h > + < h, h >= f(a) + f'(a) \cdot h + "Rest"$

$f'(a) = 2a^T$

Bemerkung: $f'(a)$ lineare Abb. von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Zeilenvektor, falls "xSSpaltenvektor)

Bemerkung: Die Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^n\mathbb{R}^m$ ist klar!

$f'(a) \in M(m \times n)$, $(f'(a) \cdot x) \in \mathbb{R}^m$

Alternativer Zugang: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, ...) \to \mathbb{R}^n$

Hält man alle Variablen bis auf eine fest, dann hat man eine Funktion mit einer Variablen und $n - 1$ Parametern. Wir benutzen einfach direkt die Ana ! Definition.

Definition: Sie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, ...)$.

Die Ableitung $\frac{d}{dx_j} f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x+he_j)-f(x)}{h}$

nennt man, falls sie existiert, partielle Ableitung nach x_j. f heißt an der Stelle x partiell diffbar, falls bei x alle partiellen Ableitungen existieren.

Definition: Sei $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor, d.h. $\|\vec{r}\|_2 = 1$.

Dann heißt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{r})-f(\vec{x})}{h}$ für $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ Richtungsableitung von f, falls der Limes existiert.

Satz: f ist an der Stelle $\vec{a}$ total diffbar

$\Rightarrow$ alle Richtungsableitungen existiern an der Stelle $\vec{a}$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle $\vec{a}$ partiell diffbar

Beweis: "$\Rightarrow_1$": Sei f total diffbar, dann ist $\lim\limits_{\vec{h}\to 0}\frac{\|f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-f'(\vec{a})\cdot\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|}=0$

Wenn man sich auf $\vec{h}=h\cdot\vec{r}$, $\vec{r}$ fix einschränkt, hat man die Richtungsableitung.

"$\Rightarrow_2$": trivial, die partiellen Ableitungen sind besondere Richtungsableitungen.

Es gilt außerdem $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{r})-f(\vec{x})}{h}=f'(\vec{a})\cdot\vec{r}\in\mathbb{R}^m$

Die Spalten von $f'(a)$ sind die entsprechenden partiellen Ableitungen. Diese definieren also $f'(a)$. (Achtung! Dies funktioniert nur wenn f total diffbar)

Satz: Falls f bei $\vec{a}$ total diffbar, dann ist f in $\vec{a}$ auch stetig.

Beweis: $\lim\limits_{\vec{h}\to 0}\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-f'(\vec{a})\cdot\vec{h}}{\|h\|}=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})=0$ q.e.d.

Bemerkung: Falls f partiell diffbar bei $\vec{a}$, so muss f noch nicht einmal bei $\vec{a}$ stetig sein! Betrachte z.B. $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0\\ ?, & sonst.\end{cases}$

An der Stelle $(0,0)$ sind beide partiellen Ableitungen Null.

partiell diffbar $\not\Rightarrow\exists$ alle Richtungsableitungen

$\not\Rightarrow$ total diffbar

Beispiel: Beispiel für: alle Richtungsableitungen existieren, aber nicht total diffbar (nicht einmal stetig):

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & falls\,y=0\\ \frac{x^2}{y} & sonst\end{cases}$$

f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig. Betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^2$ mit $a_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1\neq f(0,0)$

Alle Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$ existieren.

1. Fall: $\vec{r}=(1,0)\Rightarrow f(x,9)=0\Rightarrow$ Richtungsableitung ist 0.

2. Fall: $\vec{r} = (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\beta \neq 0$:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\vec{r} \cdot h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{\alpha^2 h^2}{\beta h}}{h} = \frac{\alpha^2}{\beta}$

Satz: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung von $\vec{a}$ partiell diffbar und alle partiellen Ableitungen seien an der Stelle $\vec{a}$ stetig. ("f ist stetig partiell diffbar"). Dann ist f bei $\vec{a}$ total diffbar.

Beispiel: $f = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{2x}{y}$, $\frac{df}{dy} = \frac{-x^2}{y^2}$ unstetig bei 0.

Beweis: O.B.d.A. sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{a} = (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\vec{h}) - 0 - f'(0,0) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

Betrachte $f(h_x, h_y) = f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) + f(h_x, 0) - 0$. Nach MWS existiert ein $\zeta \in [0, h_x]$ mit $f(h_x, 0) - 0 = \frac{df}{dx}(\zeta, 0) \cdot h_x$

ebenso existiert $\eta \in [0, h_y]$ mit $f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) = \frac{df}{dy}(h_x, \eta) \cdot h_y$

$\Rightarrow f(h_x, h_y) = \frac{df}{dx}(\zeta, 0) \cdot h_x + \frac{df}{dy}(h_x, \eta) \cdot h_y$

$\Rightarrow f(h_x, h_y) - f'(0, 0) \cdot \vec{h} = \frac{df}{dx}(\zeta, 0) \cdot h_x + \frac{df}{dy}(h_x, \eta) \cdot h_y - f'(0, 0) \cdot \vec{h}$

$= (\frac{df}{dx} f(\zeta, 0) - \frac{df}{dx}(0, 0)) \cdot h_x + (\frac{df}{dy}(h_x, \eta) - \frac{df}{dy}(0, 0)) \cdot h_y$

$\Rightarrow \frac{|(\frac{df}{dx} f(\zeta,0) - \frac{df}{dx}(0,0)) \cdot h_x + (\frac{df}{dy}(h_x,\eta) - \frac{df}{dy}(0,0)) \cdot h_y|}{\|h\|_2}$

$\leq |\frac{df}{dx} f(\zeta, 0) - \frac{df}{dx}(0, 0)| + |\frac{df}{dy}(h_x, \eta) - \frac{df}{dy}(0, 0)|$

da $\zeta \in [0, h_x]$ und $\eta \in [0, h_y]$ ist $\lim\limits_{h \to 0} \zeta = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \eta = 0$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind gilt: $\lim\limits_{h \to 0} |\frac{df}{dx} f(\zeta, 0) - \frac{df}{dx}(0, 0)| + |\frac{df}{dy}(h_x, \eta) - \frac{df}{dy}(0, 0)| = 0$ q.e.d.

Notation: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man f' auch den Gradienten von f, $grad\, f = (\frac{d}{dx} f, \frac{d}{dy} f, ...)$, $grad\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1.6.1 Rechenregeln

Satz: Seien f, g total diffbar, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + g$ ist total diffbar. Dies gilt punktweise wie global.

Die Menge der total diffbaren Funktionen ist ein Vektorraum.

Beweis: $\lim\limits_{\vec{h} \to 0} \frac{\alpha f(\vec{a}+\vec{h}) + g(\vec{a}+\vec{h}) - [\alpha f(\vec{a}) + g(\vec{a})] - [\alpha f'(\vec{a}) + g'(\vec{a})] \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

da:

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{\alpha f(\vec{a}+\vec{h}) + g(\vec{a}+\vec{h}) - [\alpha f(\vec{a}) + g(\vec{a})] - [\alpha f'(\vec{a}) + g'(\vec{a})] \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to 0} \frac{\alpha f(\vec{a}\vec{h}) - \alpha f(\vec{a}) - \alpha f'(\vec{a}) + g(\vec{a}+\vec{h}) - g(\vec{a}) g'(\vec{a}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Der Gradient von $\alpha f + g$ ist gleich $\alpha\, grad\, f + grad\, g$.
Ähnliches gilt für partielle Diffbarkeit und Existenz von Richtungsableitungen. Total diffbar ist stärker als partiell diffabr in jede Richtung. Ableitung:f' Matrix, Zeilen sind partielle Ableitungen.
Bemerkung: Wir werden uns nun Ableitungsregeln herleiten, insbesondere die Kettenregel. WIr werden uns total diffbare Funktionen ansehen. Partielle Diffbarkeit reicht in der Regel nicht aus für eine Ableitungsregel.

Satz: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (Verallgemeinerung auf $D \subset \mathbb{R}^k$ offen mit entsprechenden Bedingungen möglich). g sei an der Stelle $a \in \mathbb{R}^k$ total diffbar, f an der Stelle $g(a)$ ebenso.
Dann ist $f \circ g$ an der Stelle a total diffbar.
Es gilt: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ (Matrixprodukt)

Beweis: z.z.:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h}{\|h\|}=0$$

Schreibe: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{[f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))\cdot g'(a)]\cdot h\,\|g(a+h)-g(a)\|}{\|g(a+h)-g(a)\|}$

Wir wenden an, dass $g(a+h)\neq g(a)$

Da f total diffbar, gilt: $\forall k\to 0:$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))-f'(g(a))\cdot k}{\|k\|}=0$$

(Wähle $k=g(a+h)-g(a),$ da g bei a stetig gilt $\lim\limits_{h\to 0}k=0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))\cdot(g(a+h)-g(a))}{\|g(a+h)-g(a)\|}=0$$

Da $g$total diffbar existiert der Limes :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)\cdot h}{h\|}=0$$

$\Rightarrow\frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|}$ ist also beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{[f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))(g(a+h)-g(a)]\cdot\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|\,\|g(a+h)-g(a)\|}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))\cdot(g(a+h)-g(a))}{\|h\|}=0$$

$g(a+h)-g(a)=g'(a)\cdot h+\text{Rest},\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\text{Rest}}{\|h\|}=0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))-f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h-f'(g(a))\cdot\text{Rest}}{\|h\|}=0$$

Falls $g'(a+h)-g(A)=0$ folgt, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{\|h\|}=0$. Da der Zähler auch 0

$\Rightarrow$ Ableitung ist 0

Beispiel: Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, wir möchten $f(\cos(x),\sin(x))$ ableiten.

Setze $g(x)=\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\frac{d}{dx}f, \frac{d}{dy}f)|_{g(x)} = \frac{d}{dx}f(g(x)) \cdot (-\sin(x)) + \frac{d}{dy}f(g(x)) \cdot \cos(x)$$

b) Produktregel aus Ana 1:

z.z.: $(fg)' = f'g + fg'$

$$\text{dazu} G(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = x \cdot y, \mathbb{R}^{\not\models} \to \mathbb{R}$$

$$f(x)g(x) = F \circ G(x)$$

$$(fg)' = (g(x), f(x)) \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

c) Sei $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ total diffbar. Wie sieht die Ableitung von $\langle f, g \rangle$ aus?

$$\langle f, g \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{k} f_j(x)g_j(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\langle f, g \rangle = ...$$

$$\text{Oder Kettenregel: } F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k}, G \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$$

$$F' = \begin{pmatrix} \text{grad} f_1 \\ \text{grad} f_2 \\ ... \\ \text{grad} f g_1 \\ ... \end{pmatrix} G' = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = ...$$

ähnlich wie Produktregel Ana 1 oben

Mehrfache Ableitungen:

Falls die partiellen Ableitungen in einer ganzen offenen Umgebung eines Punktes a existieren, kann man die entsprechende Ableitungsfunktion wieder auf Diffbarkeit untersuchen. Neu im Vergleich zu Ana 1 ist/sind Frage(n) zu gemischten Ableitungen.

Bemerkung: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell diffbar an der Stelle a, gilt im Allgemeinen nicht, dass:

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(a) = \frac{d}{dy}\frac{d}{dx}f(a)!$

Satz (von Schwarz): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-mal diffbar, die k-te Ableitung existiert im totalen Sinne. Hier sind alle Kombinationen gemeint. (k-1 mal beliebig partiell, das Ergebnis sei dann total diffbar)

Dann vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k.

Beweis: Sei o.B.d.A. $a = 0$, $k = 2$

Betrachte: $T(h) = \frac{1}{h^2}(f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0))$

Definiere: $\phi(x) = f(x,h) - f(x,0)$

dann ist: $T(h) = \frac{1}{h^2}(\varphi(h) - \varphi(0)$

Wegen MWS $\exists \zeta \in [0,h]$, so dass:

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\zeta) \cdot h$$

$\Rightarrow T(h) = \frac{1}{h}(\frac{d}{dx}f(x,h) - \frac{d}{dx}f(x,0))|_{x=\zeta}$

$= \frac{1}{h}(\frac{d}{dx}f(\zeta,h) - \frac{d}{dx}f(\zeta,0))$

Da $\frac{d}{dx}f$bei 0 total diffbar ist:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{d}{dx}f(h) - \frac{d}{dx}f(0) - (\frac{d}{dx}f)' \cdot h}{\|h\|} = 0$

$\Rightarrow T(h) = \frac{1}{h}(\frac{d}{dx}f(\zeta,h) - \frac{d}{dx}f(0,0) + \frac{d}{dx}f(0,0) - \frac{d}{dx}f(\zeta,0))$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} T(h) = ((\frac{d}{dx}f)' \begin{pmatrix} \zeta \\ h \end{pmatrix} - (\frac{d}{dx}f)' \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix})\frac{1}{h}$

wähle einmal $\vec{h} = \begin{pmatrix} \zeta \\ h \end{pmatrix}$, einmal $\vec{h} = \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}$

Also: $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(\frac{d}{dx}f)' \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}f)|_{(0,0)} = \frac{d}{dy}\frac{d}{dx}f(0,0)$

Alles obige ist symmetrisch unter Vertauschung der Rollen von x und y.

$\Rightarrow$ Ebenso erhält man $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(0,0)$

Bemerkung: In der Literatur taucht häufig eine schwächere Version auf, nämlich k-mal partiell diffbar und die k. Ableitung stetig.

Definition: Die Menge aller k-mal stetig partiell diffbaren Funktionen nennt man oft C^k.

1.7 Extrema

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$. Man sagt f hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $a \in D$) eon lokales Minimum

$:\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$, so dass $f(x) \geq f(a) \forall x$ mit $\|x - a\|_2 < \epsilon$ (striktes Minimum falls $f(x) > f(a)$ für $x \neq a$)

Maximum und strikites Maximum analog.

Bemerkung: a ist hier ein innerer Punkt. Später werden wir uns Randpunkte ansehen.

Satz: Falls $a \in D$ innerer Punkt der Definitionsmenge ist und $f : F \to \mathbb{R}$ dort ein Maximum oder Minimum ht, folgt: $f' = 0$, falls f' existier.

Beweis: Falls f bei a ein Maximum hat, hat auch f eingeschränkt auf eine Gerade durch f ein Maximum.

Sei $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{r}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $I \to \mathbb{R}$

Aus Ana 1 wissen wir: $\frac{d}{dt}\varphi(t)|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow f'(\vec{a}) \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow f'(\vec{a}) = 0$

Bezeichnung: Die Stellen, an denen f' Null ist, nennt man kritische Punkte. Für diffbare Funktionen sind sie notwendiges Kriterium für lokale Extrema.

Definition: Sei $A \in M(n \times n)$. A heißt: a) positiv definit $:\Leftrightarrow \langle r, Ar\rangle > 0\ \forall \|r\|_2 = 1$
$b)$ positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \langle r, Ar\rangle \geq 0\ \forall \|r\|_2 = 1$
$c)$ negativ definit $:\Leftrightarrow \langle r, Ar\rangle < 0\ \forall \|r\|_2 = 1$
$d)$ negativ semidefinit $:\Leftrightarrow \langle r, Ar\rangle \leq 0\ \forall \|r\|_2 = 1$
$e)$ indefinit sonst. Man fordert bei b) und d) häufig auch dass ein $\|r\|_2 = 1$ existiert mit $\langle r, Ar\rangle = 0$.

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diffbar bei a, dann nennt man die Matrix $H_f(a)$ gegeben durch $(H_f(a))_{ij} = \frac{d}{dx_j}\frac{d}{dx_i}f(a)$ die Hessematrix von f. Sie ist symmetrisch (nach dem Satz von Schwarz).

Satz: Sei a ein kritischer Punkt von $f \in C^k$.
Dann gilt: $H_f(a)$ positiv definit $\Rightarrow$ a ist striktes Minimum von f.
$H_f(a)$ negativ definit $\Rightarrow$ a ist striktes Maximum von f.
Beweis: (indirekt) von $H_f(a)$ pos. def. $\Rightarrow$ Min.
W.A.: a sei kein lokales Minimum
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists x$ mit $\|a - x\|_2 < \epsilon$, so dass $f(x) > f(a)$
Setze $\vec{r} = \frac{\vec{x}}{\|x\|}$, betrachte $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{r})$.
Wenn f kein Min hat $\Rightarrow$ φ hat für eine Richtung $\vec{r}$ kein lok. Min.
$\frac{d}{dt}\varphi(t)|_{t=0} = 0$, da a kritischer Punkt, $\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)|_{t=0} \leq 0$, da W.A. kein Minimum für eine Richtung $\vec{r}$.
$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f'(\vec{a} + t\vec{r}) \cdot \vec{r})|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} f(\vec{a} + t\vec{r})r_j$
$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_k}\frac{d}{dx_j} f(\vec{a} + t\vec{r})r_j r_k|_{t=0} = \langle \vec{r}, H_f(a)\vec{r}\rangle > 0$
Wie findet man heraus, ob eine Matrix pos. oder neg. def ist? Hier haben wir den Vorteil, dass die zu untersuchende Matrix symmetrisch und dadurch (im Komplexen!) diag.bar ist.
pos. def. $\Leftrightarrow$ alle EW sind positiv

neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EW sind negativ

Im $\mathbb{R}^2$ reicht es, det und spur anzuschauen.

Beispiel: $f(x,y) = (x+1)^2 e^{-xy+y^2}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

kritische Puntke:

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = 2(x+1)e^{-xy+y^2} + (x+1)^2(-y)e^{-xy+y^2} = [2(x+1) - y(x+1)^2]e^{-xy+y^2}$$
$$\frac{d}{dy} f(x,y) = (x+1)^2 e^{-xy+y^2}(-x+2y)$$

kritische Punkte: $\nabla f = 0$

$$\frac{d}{dy} f = 0 \Rightarrow x = -1\,,\ y = \frac{1}{2}x$$

1. Fall: $x = -1$: Wann ist auch $\frac{d}{dx} f = 0$? A: immer

2. Fall: $y = \frac{1}{2}x$; $\frac{d}{dx} f = 0$?

$$\frac{d}{dx} f = [2(x+1) - \frac{x}{2}(x+1)^2]e^{-\cdots}$$
$$= (x+1)[2 - \frac{x}{2}(x+1)]e^{-\cdots}$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$$

Hessematrix: $\frac{d^2}{dx^2} f = \frac{d}{dx}[(2(x+1) - y(x+1)^2)e^{-xy+y^2}]$

$$= [2 - 2y(x+1)]e^{-xy+y^2} + (2(x+1) - y(x+1)^2)(-y)e^{-xy+y^2}$$

Zweiter Summand entspricht: $\frac{d}{dx} f \cdot (-y)$ (ist 0 an den kritischen Punkten)

Durch Ausrechnen:

$$spur H = 2(x+1)^2 e^{-\cdots} + [2 - 2y(x+1)]e^{-\cdots}$$
$$+ e^{\cdots}[2(x+1)^2 + 2 - 2y(x+1)]\big|_{(x,y)=(\frac{1-sqrt17}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})}$$
$$\det H = \frac{d^2}{dx^2} f \cdot \frac{d^2}{dy^2} f - (\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f)^2$$
$$= e^{-2xy+y^2} \cdot (...) > 0 \Rightarrow \text{Minimum, da H pos. def.}$$

1.8 Extrema unter Nebenbedingungen

In Analysis 2 sieht der Rand häufig komplizierter aus: $f(x,y) = e^{-x^2+(y+1)^2}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$
lokale Extrema können auf dem Rand liegen: $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Dieser besteht nicht einfach aus 2 Punkten (wie in Ana 1), sondern ist komplizierter. Wir suchen also neben den kritischen Punkten im Inneren, Extrema von f auf $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, d.h. Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, dann nennt man die Menge $L_f(h) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) - h\}$ Höhenlinie von f mit Wert h.
Falls f diffbar, steht der Gradient von f senkrecht auf den Höhenlinien. Ansonsten wäre die Richtungsableitung entlang der Höhenlinie ungleich 0. Wir werden Nebenbedingungen als Höhenlinien einer Funktion angeben, das macht die Bestimmung der Extrem einfacher.
Obiges Beispiel: $g(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, Nebenbedingung erfüllt auf der Höhenlinie mit $h = 0$. An einem lokalen Extremum unter der Nebenbedingung gilt auch für f, dass der Gradient senkrecht auf der Höhenlinie von g liegt. (gemeint ist die Höhenlinie, die die NB definiert)
$\langle grad\, f, \vec{r} \rangle = 0$, $\vec{r}$ die Richtung entlang der Höhenlinie der NB.
$\Rightarrow grad\, f \parallel grad\, g$, d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ so dass $grad\, f - \lambda\, grad\, g = 0$
Man sucht also für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das lokale Extremum von $f - \lambda g$, d.h. $\nabla(f - \lambda g) = 0$
λ heißt Lagrangeparameter. Da g auf der NB konstant ist, hat $f - \lambda g$ ein lokales Extremum unter NB, falls f allein ein solches besitzt. Die kritischen Punkte sind also Stellen, für die ein λ existiert, so dass $\nabla(f - \lambda g) = 0$. g sollte so gewählt werden, dass $grad\, g$ auf der Höhenlinie nicht Null ist.

Beispiel: Nebenbedingung: $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, $f(x,y) = e^{-x^2+(y+1)^2}$

$grad\, f = (-2xe^{-x^2+(y+1)^2},\, 2(y+1)e^{-x^2+(y+1)^2})^T \Rightarrow (0,-1)$ kritischer Punkt ohne NB

$grad\, g = (2x,\, 2y)^T$

$$e^{\cdots}\begin{pmatrix} -2x \\ 2(y+1) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0,\ \lambda = e^{\cdots}\tilde{\lambda}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} -2x \\ 2(y+1) \end{pmatrix} - \tilde{\lambda} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\right] = 0 \overset{\text{aus I:}}{\Rightarrow} \tilde{\lambda} = -1,\ \text{II}:\ 2y+2+2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Achtung!: $x = 0$ nicht vergessen, dann $\tilde{\lambda}$ beliebig

1. Fall: $\tilde{\lambda} = -1,\ y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Fall: $x = 0 \Rightarrow$ I erfüllt, II: $(2y+1) - \tilde{\lambda}(2y) = 0$, III: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \pm 1$, aus II könnte man $\tilde{\lambda}$ bestimmen

Betrachte die Werte von f an den kritischen Punkten, daraus könne wir ablesen, ob lokale Max. oder Min. vorliegen.

Zusammenfassung: $e^{-x^2+(y+1)^2},\ \{x^2+y^2-1=0\}$

kritische Punkte: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$f(1,0) = e^{-1+1} = 1,\ f(-1,0) = 1,\ f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1,\ f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} < 1$

$\Rightarrow$ Minima bei $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, Maxima bei $(\pm 1, 0)$

Die Methode lässt sich auf mehr als 2 Dimensionen erwitern: $f(x,y,z)$, NB: $g(x,y,z) = 0$

Wieder ist $grad\, f \parallel grad\, g$ am kritischen Punkt.

Man kann hie mehrere Nebenbedingungen betrachten: $f(x,y,z)$, $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$

Dann liegt $grad\, f$ in der Ebene, die von $grad\, g_1$ und $grad\, g_2$ aufgespannt wird (am kritischen Punkt)

$grad\, f - \lambda_1\, grad\, g_1 - \lambda_2\, grad\, g_2 = 0$ für geeignete $\lambda_1,\ \lambda_2$

Problematisch wäre der Fall, wenn $grad\, g_1 \parallel grad\, g_2$

$g(x, y) = 0$ ist eine Höhenlinie. Wann ist die Höhenlinie in der tat die Spur einer Kurve? Wann kann man die Höhenlinie als Graph einer Funktion $y = h(x)$ schreiben? $\gamma : x \to \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}$

Spur von γ ist Graph von h.

<u>Beispiel:</u> $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in 0, 2\pi$ hat als Spur die Höhenlinie $g = 0$

Als Graph einer Funktion lässt sich $g = 0$ nicht schreiben, aber an den meisten Stellen geht es lokal, d.h. an den meisten Punkten $\omega \in \{g(x, y) = 0\}$ gibt es eine offene Umgebung U mit $\omega \in U$, so dass $\{g(x, y) = 0\} \cup U$ ein Graph ist.

Dies könnte man auch beim Kapitel Extrema unter NB gut brauchen: $\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = 0$

$\langle grad\, g, \gamma' \rangle$ bzw. $\gamma' \cdot grad\, g$

Für lokales Extremum von f entlang von γ hat man: $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$ kritische Punkte wie in Ana. 1

$\gamma' \cdot grad\, f = 0 \Rightarrow grad\, f = \lambda\, grad\, g$

<u>Definition:</u> Eine Funktion $h : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt implizit definiert, falls man ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ angibt und $f(x, h(x)) = 0$ fordert. Wenn man die Funktion mittels Formel $h(x) = ...$ angibt, nennt man sie explizit definiert.

<u>Satz (über die implizite Funktion I):</u>

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a, b) = 0$.

Sei $\frac{d}{dy} f(a, b) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathbb{R}^2 \supset U$ mit $(a, b) \in U$, U offen und ein $D \subset \mathbb{R}$ mit $a \in D$, D offen und eine Funktion $h : F \to \mathbb{R}$, so dass:

$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)\ \forall (x, y) \in U$

<u>Beweis:</u> Sei o.B.d.A. $a, b = 0$, $U := \{|f'(x, y) - f'(a, b)| < \epsilon\}$

Betrachte $f(\delta, 0)$:

<u>1. Fall:</u> $f(\delta, 0) > 0$

Idee: wir gehen so weit in die y-Richtung, bis $f(\delta, y) < 0$

$\frac{d}{dy}f(x,y) \neq 0$ für ϵ hinreichend klein.

Falls $\frac{d}{dy}f(0,0) = \lambda > 0$ ist, dann ist $\frac{d}{dy}f(x,y) > \lambda - \epsilon$

wähle $\epsilon < \frac{\lambda}{2}$, dann ist $\frac{d}{dy}f(x,y) > \frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow f(\delta, y) \geq f(\delta, 0) + \frac{d}{dy}f(\delta, \zeta) \cdot y$ (MWS)

wähle $y = -\frac{f(\delta,0)}{\frac{\lambda}{2}} \Rightarrow f(\delta, y) \leq f(\delta, 0) - \frac{\lambda}{2}\frac{f(\delta,0)}{\frac{\lambda}{2}} = 0$

Da $f(\delta, 0) > 0$ und $f(h, y) < 0$, gibt es dazwischen einen Wert $\eta : f(\delta, \eta) = 0$ (ZWS)

Wir haben also ein $\eta := h(\delta)$ gefunden mit $f(\delta, h(\delta)) = 0$. Dieser Wert $h(\delta)$ ist eindeutig!

<u>W.A.:</u> $f(\delta, y_1) = 0$, $f(\delta, y_2) = 0 \Rightarrow \exists \zeta \in \eta_1, \eta_2 mit \mathrm{d}\overline{dyf(\delta,\zeta)=0}$

Widerspruch zu $\frac{d}{dy}f(x,y) > \frac{\lambda}{2}$ auf ganz U.

Wir müssen nur noch prüfen, dass $(\delta, \eta) \in U$.

aber da $|\eta| = |y| = \frac{f(\delta,0)}{\frac{\lambda}{2}} \underset{\delta \to 0}{\to} 0$, da f stetig, $f(0,0) = 0$. Wenn δ hinreichend klein ist, bleibt $(\delta, \eta) \in U$. Die anderen Fälle, $f(\delta, 0) < 0$, $\frac{d}{dy}f(0,0) < 0$ etc. analog.

Man kann auch die Ableitung von h bestimmen. Wähle $\epsilon \ll \frac{\lambda}{2}$, $f(\delta, 0) = \frac{d}{dx}f(0,0) \cdot \delta + r_1\delta$

$\lim\limits_{\delta \to 0} r_1 = 0$

$f(\delta, \eta) = f(\delta, 0) + \frac{d}{dy}f(0,0) \cdot \eta + r_2 \cdot \eta$, $\lim\limits_{\delta \to 0} r_2 = 0$

$\eta = \frac{-\frac{d}{dx}f(0,0)\cdot\delta - r_1\delta}{\frac{d}{dy}f(0,0)+r_2} = \frac{-\frac{d}{dx}f(0,0) - r_1}{\frac{d}{dy}f(0,0)+r_2} \cdot \delta$

mit dem Limes erhält man also: $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\eta}{\delta} = \frac{-\frac{d}{dx}f(0,0)}{\frac{d}{dy}f(0,0)} = \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{h(\delta) - h(0)}{\delta} = h'(0)$

$\Rightarrow h'(0) = \frac{-\frac{d}{dx}f(0,0)}{\frac{d}{dy}f(0,0)}$, h ist also sogar diffbar auf D.

<u>Umkehrfunktion:</u> $y = f(x)$, $y - f(x) = 0$ Umkehren: $x - f(y) = 0$. Gibt es ein $f^{-1}(x) = y$?

Nach Satz der impliziten Funktion gilt:

Zumindest lokal geht das, falls $\frac{d}{dx}(x - f(y)) \neq 0$.

Außerdem gilt: $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x) = \frac{1}{-(\frac{d}{dy}f(y))} = \frac{1}{\frac{d}{dy}f(y)} = \frac{1}{f"(f^{-1}(x))}$, d.h. $f"(y) \neq 0$.

Satz über die implizite Funktion II: Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ stetig partiell diffbar. $f(x, y) = 0$, zumindest auf einer Umgebung um eine Nullstelle von f, gibt es eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mit:

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$$

Bemerkung: Wenn yy k Variablen hat, braucht man auch k Gleichungen um y zu bestimmen. Da f nach $\mathbb{R}^k$ abbildet, besteht $f(x, y) = 0$ genau aus k Gleichungen, nämlich $f_j(x, y) = 0$ für $j = 1, ..., k$

Beweis: folgt nach Fixpunktsatz von Banach

Deefinition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, so dass ein $0 \leq q < 1$ existiert, so dass $||f(x) - f(y)||_2 \leq q||x - y||_2$ gilt, so nennt man f Kontraktion.

Satz: (Fixpunktsatz von Banach) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion, dann hat f genau einen Fixpunkt.
Beweis: Wähle $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und betrachte folgende Folge: $x = x_0$, $x_{j+1} = f(x_j)$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ der eindeutige Fixpunkt:

1) Existiert denn der Limes? $x_n = (\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1} - x_j) + x_0$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } x_2 - x_1 &= f(x_1) - f(x_0) \Rightarrow \|x_2 - x_1\|_2 \leq q\|x_1 - x_0\|_2 \\ x_3 - x_2 &= f(x_2) - f(x_1)... \\ \Rightarrow \|x_{j+1} - x_j\|_2 &\leq q^j\|x_1 - x_0\|_2 \end{aligned}$$

Da $q < 1$ folgt, dass also die Glieder $x_{j+1} - x_j$ durch $q^j\|x_j - x_0\|_2$ beschränkt sind, also ist obiges eine Cauchy-Folge. (Folge konvergiert absolut, beschränkt durch geometrische Reihe).

$\Rightarrow$ Konvergenz.

2) Existenz, bzw. Fixpunkteigenschaft: $a = \lim_P n \to \infty x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Eine Kontraktion ist stetig: $\|f(x) - f(y)\|_2 < q\|x - y\|_2 \Rightarrow \lim n \to \infty x_n = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ also $a = f(a)$

3) Eindeutigkeit: W.A. $f(a) = a$ und $f(b) = b$ mit $a \neq b \Rightarrow f(b) - f(a) = b - a \Rightarrow \|f(b) - f(a)\|_2 = \|b - a\|_2$

Widerspruch zur Kontraktionseigenschaft. Der Beweis geht analog für vollständige metrische Räume.

Mit Hilfe des Satzes kann man den Satz über die implizite Funktion beweisen: Wir basteln uns hierzu eine Funktion, so dass der Fizpunkt genau auf der Höhenlinie zum erliegen kommt.

<u>Beweis zum Satz der impliziten Funktion:</u> Sei also $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

Wir definieren folgende Abbildung: $g(y) = \frac{f(x,y)}{-\frac{d}{dy}f(0,0)} + y$ wobei $-\frac{d}{dy}f(0,0)$ eine $n \times k$-Matrix ist, ihr Inverses muss vorhanden sein.

Der Fixpunkt von g liegt auf der Höhenlinie:

$$g(a) = a \Rightarrow g(a) = \frac{f(a,y)}{-\frac{d}{dy}f(a,y)} + a = a \Rightarrow f(a,y) = 0$$

g ist eine Kontraktion, so lange man sich auf einen Bereich einschränkt, in dem $\frac{d}{dy}f(x,y)$ eine Nullstelle hat.

$$g(a) - g(b) = \frac{f(a,y) - f(b,y)}{-\frac{d}{dy}f(0,0)} + a - b$$

Wir nähern $f(a,y) \approx f(0,y) + \frac{d}{dy}f(0,0)a + rest$

$$\Rightarrow g(a)-g(b) = \frac{f(0,y) + \frac{d}{dy}f(0,0)a + rest_1 - f(0,y) - \frac{d}{dy}f(0,0)b - rest_2 + a - b}{-\frac{d}{dy}f(0,0)}$$

$$= \frac{\frac{d}{dy}f(0,0)(a-b)+a-b}{-\frac{d}{dy}f(0,0)} + \frac{rest_1 + rest_2}{-\frac{d}{dy}f(0,0)}$$

Solange man sich in einer Umgebung befindet, in der die Ableitung $\frac{d}{dy}f(x,y)$ gut durch $\frac{d}{dy}f(0,0)$ angenaäehert ist, hat man die Kontraktionseigenschaft, So lange wir diesen Bereich nicht verlassen, können wir den Fixpunktsatz verwenden.

Satz: (von Taylor) Beim Satz von Taylor geht es um die Approximierbarkeit von Funktionen durch Polynome. Geg.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kann f durch ein Polynom, welches in einem Punkt q mit f und all seine Ableitugnen übereinstimmt, approximiert werden?
Ana 1: $p(x) = a + bx + cx^2 + ...$
Ana 2: $p(\vec{x}) = \vec{a} + B\vec{x} + C(x,x) + ...$ mit B Matrix, $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
Idee: $p_n^a(x) = \sum_{j=0}^n f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!}$ ist ein Polynom von Grad n, welches in allen Ableitungen der Ordnung $\leq n$ mit den Ableitungen von f übereinstimmt.
Fragen:
1) Konvergenz: ob und wo? "Problem": Der Konvergenzradius könnte 0 sein.
2) Auch bei endlichen Konvergenzradien kann der Limes existieren, abe rvon f verschieden sein!

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$, (n+1)-mal stetig diffbar, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $f(x) = p_n^a(x) + R_n^a(x)$ für alle $x \in D$, ein festes $a \in D$, mit:
$a)\, p_n^a(x) := \sum_{j=0}^n f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!}$ Taylorreihe mit Entwicklungspunkt a
$b)\, R_n^a(x) = f^{n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$ mit ξ zwischen a und x

Beweis: Sei o.B.d.A $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Betrachte $f(x) - p_n^0(x) = g^0(x)$
Die ersten n Ableitungen von g an der Stelle 0 sind alle 0. Sei C die größte $(n+1)$-te Ableitung zwischen 0 und x.

$$C := \max\{f^{(n+1)}(s) : 0 \leq s \leq x \text{ bzw. } x \leq s \leq 0\} \Rightarrow f^{(n+1)}(s) = g^{(n+1)}(s) \leq C$$

Wegen Hauptsatz :

$$g^{(n)}(x) - \int_0^x g^{(n+1)}(s)ds \leq \int_0^x C\, ds = Cx$$

$$f^{(n-1)}(x) = \int g^{(n)}(s)ds \leq \int_0^x Cs\, ds = C\frac{x^2}{2} \Rightarrow g(x) \leq C\frac{x^{n+1}}{(m+1)!}$$

Ebenso gilt für $k := \min\{f^{(n+1)}(s),\, 0 \leq s \leq x \text{ bzw. } x \leq s \leq 0\}$:

$$g(x) \geq k\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow g(x) = W\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit einem W zwischen k und C.
$\Rightarrow W = f^{(n+1)}(\xi)$ mit $\xi \in [0,x]$ bzw. $[x,0]$

Zurück zu den beiden Fragen:
1) wo konvergiert $p_n(x)$? Das hat mit Satz von Taylor nichts zu tun. Wir betrachten einfach den Konvergenzradius der Potenzreihe $p_n(x)$
Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Konvergenzradius $r \in [0,\infty]$
2) Ist der Limes der Taylorreihe gleich der Funktion? Hier hilft der Satz von Taylor, insbesondere das Restglied. Geht das Restglied gegen 0, so konvergiert p_n gegen f.
Falls $f^{(n+1)}$ beschränkt, bleibt z.B. durch 2^n etc., dann geht das Restglied gegen Null. Falls $f^{(n+1)}(\xi)$ schneller wächst als z.B. $(j!)^2$ hat man keine Konvergenz. Betrachtet man zum Beispiel die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$, 0 sonst, hat man eine solchen Fall.

<u>Verallgemeinerung für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (für $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ komponentneweise)</u>
<u>Notation:</u> $\nabla = (\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, ..., \frac{d}{dx_n})^T$
$\vec{a}\vec{\nabla} = \sum_{j=1}^{d} a_j \frac{d}{dx_j}$, d.h. $\vec{a}\vec{\nabla} f := \sum_{j=1}^{d} a_j \frac{d}{dx_j} f$

Satz: (von Taylor II) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sei $(n+1)$-mal stetig partiell diffbar.

Dann ist $f(x) = p_n^a(x) + R_n^a(x)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ mit:

$$\text{a) mit } p_n^a(x) := \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j!}[(x-a)\nabla]^j f|_a$$

$$\text{b) mit } R_n^a(x) = \frac{1}{(n+1)!}[(x-a)\nabla]^{n+1} f|_\xi$$

mit ξ zwischen x und a, d.h. $\xi = x + \alpha(a-x)$ mit $\alpha \in [0,1]$

Beweis: Sei $a = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(t\vec{x})$, $t \in \mathbb{R}$

Das ist eine Funktion einer Variablen und wir können den Satz von Taylor 1 benutzen.

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)(1-0)^j$$

$$\varphi'(t) = \vec{x}\vec{\nabla} f(\vec{x}t) = (\vec{x}\vec{\nabla})f|_{\vec{x}t}$$

$$\varphi'' = (\vec{x}\vec{\nabla})^2 f|_{\vec{x}t}$$

usw.

Das entsprechende Restglied von φ hat die Form:

$$\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!}(\vec{x}\vec{\nabla})^{n+1} f|_{\vec{x}\xi} \text{ mit } \xi \in [0,1]$$

Wieder besteht die Frage nach Konvergenz der Taylorreihe woie, ob sie ggf. gegen f konvergiert.

Zu 1) benötigen wie die Theorie zu Potenzreihen im Mehrdimensionalen. Die entsprechenden Sätze und Definitionen lassen sich aus Ana. 1 geradlinig verallgemeinern.

Zu 2), wie oben ist das Restglied entscheidend.

Definition: Eine Reihe $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}^n$ heißt absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \|a_j\|$ konvergent.

Frage: hängt die Definition von der Norm ab?

Antwort: Im endlich dimensionalen nicht wegen der Äquivalenz der Normen nicht!

Satz: Falls eine Reihe absolut konvergiert, konvergiert sie auch im eigentlichen Sinne.

Beweis: Genau wie in Ana. 1: Betrachte eine absolut konvergente Reihe $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \|a_j\|$ erfüllt die Cauchy-Eigenschaft, d.h.:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sum_{j=n}^{m} \|a_j\| < \epsilon \; \forall n, m \geq N$$

$$\Rightarrow \| \sum_{j=n}^{m} a_j \| \leq \sum_{j=1}^{m} \|a_j\| \;\; \triangle\text{-Ungl. erfüllt auch Cauchy-Eigenschft, also konvergiert die Reihe}$$

Satz: (Wurzelkriterium) Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{n} a_j$. Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$, dann konvergiert die Reihe nicht.

Beweis: a) Betrachte $\sum_{j=1}^{n} \|a_j\|$. Das ist eine Ana. 1 Situation. Das Wurzelkriterium aus Ana 1 kann direkt benutzt werden. $\limsup(...) < 1 \Rightarrow \sum \|a_j\|$ konvergiert, $\Rightarrow \sum a_j$ konvergiert

b) Die Divergenz im Fall $\limsup(...) > 1$ folgt, da in diesem Fall a_j keine Nullfolge sein kann.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|a_n\| \geq 1 \neq 0$$

Mit Hilfe des Wurzelkriteriums können wie etwas über den Konvergenzbereich der Taylorreihe (oder anderen Potenzreihen) sagen:

1) Konvergenz falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((x-a)\nabla)^n f}{n!}} < 1$
2) Divergenz falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((x-a)\nabla)^n f}{n!}} > 1$

Sei die Richtung von $(x-a)$ vorgegeben $(\vec{r})$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x-a|^n \|(\vec{r}\nabla)^n f|_a\|} = |x-a| \limsup \sqrt[n]{\|(r\nabla)^n f|a|\|}$$

1.9 Analysis auf Banachräumen

Definition: Sei V ein normierter Banachraum, der bzgl. dieser Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist. Dann nennt man $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum.

Auf Banachräumen lässt sich eine Ableitung definieren. z.B.¿ $f : V \to \mathbb{R}$ heißt diffbar, falls eine Abbildung A existiert, die linear und stetig ist, mit:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \mathcal{O}(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} = 0$ (lim in Bezug auf $\|\cdot\|$ gemeint, mit der V ein Banachraum ist).

Bemerkung: Im unendlich dimensionalen muss eine lineare Abbildung nicht stetig sein.
Beispiel: Differentiation ist linear, $\epsilon \sin(\frac{x}{\epsilon^2})$ bzgl. der sup-Norm wird das klein, die Ableitung aber groß.
Viele Sätze, z.B. Linearität dieser Ableitung... gelten immer noch. INsbesondere der Fixpunktsatz von Banach!

1.9.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Motivation: Ein Massenpunkt falle im lokalen Gravitationsfeld unter Reibung, wie sieht die Bewegung des Punktes aus? Annahme: Bewegung nur in vertikaler

Richtung: $x(t)$ gibt die Höhe zum Zeitpunkt t an.

$$\ddot{x}(t) = -g + r \cdot \dot{x}(t), \ \ g, r \in \mathbb{R}$$

Eine solche Gelichung nennt man Differentialgleichung. Im Folgenden überlegen wir, wie wir Lösungen dazu finden und ob überhaupt Lösungen existieren und/oder eindeutig sind.
Zur Gelichung wird oft ein Afangswert angegeben:

$$x(0) = x_0 \text{ mit } x_0 \in \mathbb{R}$$

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}$, D offen eine Funktion. Die Gelichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

nennt man Differentialgelichung n-ter Ordnung. Die Forderung $y(x_0) = y_0$ nennt man Anfangswertproblem. Sei $y : \mathbb{R} \supset I$ ein offenes Intervall, mit $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ für alle $x \in I$, dann nennt man diese Funktion y lokale Lösung der DGL, falls das AWP $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist.
Falls $I = \mathbb{R}$, dann nennt man y eine globale Lösung.
Falls für jede weitere Lösung $\tilde{y}\tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \tilde{I}$ und $y(x) = \tilde{y}(x) \, \forall x \in I$ folgt: $I = \tilde{I}$, dann heißt y maximale Lösung.

1.9.2 Trennung der Variablen

Betrachte eine DGL erster Ordnung der Form:$y'(x) = g(y)h(x)$ mit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar.
Lösungsrezept:

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x)$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = h(x)dx \qquad | \int$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y')} dy' = \int_{x_0}^{x} h(x')dx'$$

dann auflösen nach y. Durch die Wahl der Grenzen geht die Lösung durch (x_0, y_0).

<u>Beispiel:</u> $y' = y^2 \cos(x)$, $y(0) = 1$
$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos(x) \to \frac{dy}{y^2} = \cos(x)dx \to \int_1^y \frac{1}{y'^2} dy' = \int_0^x \cos(x')dx'$
$\Leftrightarrow [-\frac{1}{y'}]_1^y = [\sin(x')]_0^x \Leftrightarrow -\frac{1}{y} + 1 = \sin(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\sin(x)}$

<u>Theorie zur Trennung der Variablen:</u> $y' = g(y)h(x)$
Sei H eine Stammfunktion von h und G eine Stamfunktion von $\frac{1}{g}$.
Betrachte die "Höhenlinie" $G(y) - H(x) = 0$. Satz über die implizite Funktion sagt uns: man findet eine Funktion $y(x)$, falls $\frac{d}{dy}G(y) \neq 0$, d.h. $\frac{1}{g(y)} \neq 0$. Außerdem: $\frac{d}{dx}y(x) = -\frac{\frac{d}{dx}F}{\frac{d}{dy}F} = \frac{h(x)}{\frac{1}{g(y)}} = g(y)h(x)$.
Falls $G(y) = 0$ ist das unter Umständen problematisch. In diesem Falls hat man immer die Lösung $y = y_0 : y' = 0$, $g(y_0)h(x) = 0$.

<u>Besipiel:</u> $y' = \frac{2y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ " $\Rightarrow$ " $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$
$\Rightarrow \ln(y) = 2\ln(x) + C \Leftrightarrow y = x^2 \cdot e^C$
z.B. $y = x^2$ bei AWP $y(0) = 0$

<u>Beispiel:</u> $y' = 2\sqrt{y}$, $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^2$
$y = 0$ ist Lösung. Zu DGL $y' = 2\sqrt{y}$ ist die Funktion $y = 0$ eine Lösung, aber auch $y = x^2$, ebenso:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < k \\ (x-k)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen: $y = x^2$, $y' = 2x$, $2\sqrt{y} = 2x$, falls $x \geq 0$.
Die Lösungen sind also nicht eindeutig. Für $y_0 > 0$ sind sie zumindest lokal eindeutig.

1.9.3 Variation der Konstanten

Wir betrachten DGL der Form $y' = g(x)y + h(x)$.

Sei zunächst $h(x) = 0$, d.h. $y' = g(x)y$. Trennung der Varisblen liefert:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x)dx \Rightarrow \ln(y) = G(x) + C \Rightarrow y = e^C e^{G(x)}$$

AWP: $y = y_0 e^{-G(x_0)}$, wobei $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)dx$, d.h. $G(x_0) = 0$

Verallgemeinerung für $h(x) \neq 0$. Es reicht in diesem Fall eine Lösung zu finden.

Weitere Lösungen kann man mit Hilfe der Funktion $y = Ce^{G(x)}$ basteln!

Gegeben:

$$y' = g(x)y + h(x) \ (1)$$

Sei $y(x)$ eine Lösung dieser DGL, sei $\tilde{y}(x)$ eine Lösung der DGL:

$$y' = g(x)y \ (2)$$

d.h. $\tilde{y} = Ce^{G(x)}$, dann ist $y(x) + \tilde{y}(x)$ ebenfalls eine Lösung von (1). Umgekehrt gilt: Ist die Differenz zweier Lösungen von (1) eine Lösung von (2)

$$(y + \tilde{y})' = y' + \tilde{y}' = g(x)y + h(x) + g(x)\tilde{y} = g(x)(y + \tilde{y}) + h(x)$$

$$(y - \tilde{y})' = g(x)y + h(x) - g(x)\tilde{y} - h(x) = g(x)(y - \tilde{y})$$

falls $y, \tilde{y}$ Lösungen von (1).

$y' = g(x)y + h(x)$, Lösung ist $Ce^{G(x)}$. Allgemeine Lösung der lin. DGL mit Inhomogenität $h(x)$ ist gegeben durch eine spezielle Lösung von (1) plus einer Lösung der homogenen linearen DGL $y' = g(x)y$

Suche nach einer speziellen Löung von (1):

Rezept: Ansatz $y(x) = C(x)e^{G(x)}$. Einsetzen in (1), suche $C(x)$ so, dass es passt.

$$\Rightarrow y'(x) = C(x)e^{G(x)} + C(x)g(x)e^{G(x)} = g(x)C(x)e^{G(x)} + h(x)$$

$$C'(x) = \frac{h(x)}{e^{G(x)}}$$

$C(x)$ ist Stammfunktion von $\frac{h(x)}{e^{G(x)}}$

Beispiel: $y' = xy + x^3$

1) Betrachte die homogene DGL $y' = xy \ \rightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

2) Suche der speziellen Lsg.: Ansatz $y = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow y' = C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + Ce^{\frac{x^2}{2}}x = xCe^{\frac{x^2}{2}} + x^2 \Rightarrow C' = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Partielle Integration:

$$-x^2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} = C(x), \quad \text{da:}$$

$$C'(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^3e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = (-x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = (-x^2 - 2)$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = (-x^2 - 2) + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

AWP: $y(0) = 1$

$$y(0) = -2 + Ce^0 \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow y(x) = (-2 - x^2) + e^{\frac{x^2}{2}}$$

ist Lösung von (1) zum AWP $y(0) = 1$.

1.9.4 Existenz und Eindeutigkeit von DGL 1. Ordnung

Wir betrachten DGL der Form $y' = f(x, y)$

Satz: (von Picard-Lindelöff) Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f : [a, b] \times B \rightarrow B$, B Banachraum) stetig und global Lipschitz-stetig im 2. Argument, d.h. $\exists L > 0$ so, dass $\forall y, z \in B$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, y_0) \in]a, b[\times B$ eine eindeutige Lösung der DGL.

<u>Beweis:</u> Zunächst suche nach eine lokalen Lösung, 'global' später. Wir betrachten stetige Funktionen von $[a, b] \to B$ als Elemnte eines neuen Banachraums mit Norm

$$\| \cdot \|_\infty, \text{ d.h. } \|y\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} \|y(x)\|$$

(Vollständigkeit folgt später, wird hier erstmal angenommen).
Wir betrachten erstmal lokale Eigenschaften, $a < b$ ist also noch frei wähkbar, o.B.d.A. sei $x_0 = 0$, d.h. $a < 0 < b$.
Definiere Abbildung $T : C \to C$ (C ist der neue Banachraum) geg. durch $T(y) := y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds$
Ein Fixpunkt dieser Abbildung T hat die Eigenschaft:

$$y = T(y) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds, \text{ d.h.:}$$

a) $y(0) = y_0$ (AWP)
b) $y' = 0 + f(x, y(x))$ (DGL)
Es fehlt nur zu zeigen, dass T kontrahierend ist, dann folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Eigenschaft des Fixpunktes. Da Fixpunkte von T genau die Lösungen der DGL zum AWP sind, hat man lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

$$\|T(y) - T(z)\|_\infty = \|y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds - y_0 - \int_0^x f(s, z(s))ds\|_\infty$$

$$= \| \int_0^x (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \| \int_0^x (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds\|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} \int_0^x \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|ds \leq \int_0^b L\|y(s) - z(s)\|ds \leq L\|y - z\|_\infty \cdot b$$

Wähle $b = \frac{1}{2L}$, dann ist das eine Kontraktion (bzw. $a = -\frac{1}{2L}$ für analogen Fall). Wir haben also Existenz und Eindeutigkeit de Lösung in $[-\frac{1}{2L} + x_0, \frac{1}{2L} + x_0]$. Globale Aussage ($a$ kann auch $-\infty$, b kann auch $+\infty$ sein). Da die Intervalllänge nicht von x abhängt, kann man die lokalen Lösungen in einer globalen Lösung zusammenführen.
Es gibt auch lokale Versionen des Satzes: Lipschitz-stetig in einer Umgebung.
Im Satz spielt die Abbildung T eine entscheidende Rolle:

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))ds,\ T : C \to C$$

Offensichtlich bildet T stetige Funktionen auf diffbare Funktionen ab.

Picard-Iteration: Mit Hilfe von T kann man eine Lösung der DGL $y' = f(x, y(x))$ annähern:

$$\text{Start: } y_0 \to y_1(x) = T(y_0) \to y_2(x) = T(y_1) \to ...$$

Benutzt man diese Iteration mehrfach, bekommt man zumindest eine Annäherung an die Lösung.

Einschub: Vollständigkeit der Menge der stetigen Funktionen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Wir müssen noch zeigen, dass $C : \{f : I \to_{B,\ \text{stetig}}\}$ ein Banachraum ist.

Beweis: Dass C ein Vektorraum ist, ist offensichtlich. Zu zeigen ist hier die Vollständigkeit. Sei also $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ eine Cauchy-Folge. Wir definieren den punktweisen Limes $y : I \to_{B,\ y(x):=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)}$ wobei $y_n(x) \in_B$. Der Limes existiert, da B Banachraum. Es bleibt zu zeigen:
1) $y \in C$, d.h. y ist stetig.
2) In der Tat ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|y - y_n\|_\infty = 0$.

Zu 1): Hier benutzten wir eine Verallgemeinerung von Sätzen aus der Analysis 1.

Satz: Eine auf einem Kompaktum K stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
W.A.: f ist nicht glm. stetig, d.h.:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta : \exists x, y \in K : \ \|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon, \ \|x - y\| < \delta$$

Setze $\delta = \frac{1}{n}$, d.h.

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ {}_n, y_n \in K : \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon$$

wobei $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$.
Sei $x := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ o.B.d.A. können wir annehmen, dass der Limes existiert. Wir wählen eine entsprechende Teilfolge aus. Existenz einer konvergenten Teilfolge folgt aus der Kompaktheit.
Auch $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$, da $\|x_n - y_n\| \to 0$. Wegen der Stetigkeit von f gilt:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \ f(x) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$$

Widerspruch zu $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$!
Satz: Eine punktweise konvergente Folge glm. konvergenter Funktionen hat einen stetigen Limes.

Beweis: Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils glm. stetige Funktionen von $D \to W$.
Mit f gegeben durch $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$.
z.z.: f ist stetig:
Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \subset D}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in D$.
z.z.: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) - f(x) = 0$.
Betrachte:

$$f(x_n) - f(x) = f(x_n) - f_m(x_n) + f_m(x_n) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)$$

z.z.: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \|f(x_n) - f(x)\| < \epsilon \; \forall n \geq N$.

Wähle m, n so, dass:

$$\|f(x_n) - f_m(x_n)\| < \frac{\epsilon}{3}, \; \|f_m(x_n) - f_m(x)\|\frac{\epsilon}{3}, \; \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

Dabei wählen wie erst ein m, so dass die mittlere Eigenschaft gilt. Wegen der Stetigkeit von f_m darf n variiert werden.

Zu 2) Die Konvergenz bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ ist zu zeigen.

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge von Funktionen von $[a, b] \to_B$. y ist der punktweise Limes.

z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$

Betrachte: $\sup\limits_{x\in I}\{\|y_n(x) - y(x)\|_B\}$

Wir wissen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } \sup_{x\in I} \|y_m(x) - y_n(x)\|_B < \epsilon \; \forall n, m \geq N$$

Wir zeigen, dass $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\|y_n(x) - y(x)\|_B < \epsilon \; \forall x \in I$.

Wähle N so, dass $\sup\limits_{x\in I} \|y_m(x) - y_n(x)\|_B < \frac{\epsilon}{2} \; \forall n, m \geq N$.

$$y(x) - y_n(x) = y(x) - y_m(x) + y_m(x) - y_n(x)$$

Das "Problem"könnte sein, dass n von x abhängt! Wähle zunächst N, so dass $\|y_m(x) - y_n(x)\|_B < \frac{\epsilon}{2} \; \forall x \in I$. Dann nehme ein beliebiges $x \in I$ und wähle n außerdem so groß, fass $\|y(x) - y_n(x)\|_B < \frac{\epsilon}{2}$. Dieses m könnte von x abhängen, macht aber nichts:

$$\|y(x) - y_n(x)\|_B < \epsilon \; \forall n \geq N \; \forall x \in I$$

1.10 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten DGL der Form:

$$y' = A(x) \cdot y(x),\ \ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (homogene)}$$

sowie:

$$y' = A(x) \cdot y(x) + b(x),\ \ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ (inhomogene)}$$

Eine Möglichkeit, diese zu lösen hatten wir bereits: Variation der Konstanten. Wir nehmen an, dass $A(x)$ und $b(x)$ stetig sind. Dann gelten die Voraussetzungen von Picard-Lindelöff:

$$y' = f(x, y),\ \text{ hier } f(x, y) = A(x)y + b(x)$$

ist stetig und Lipschitz-stetig ïn y". (Anmerkung: global Lipschitz-stetig auf jedem abgeschlossenen Intervall)

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| = \|A(x) \cdot (y - z)\| \leq \sup_{i,j,x} |A_j(x)| \cdot \|y - z\| = L\|y - z\|$$

mit $L := \sup_{i,j,x} |A_j(x)|$. Falls A, b stetig sind, dann haben wir für jede Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

<u>Satz:</u> Falls man alle Lösungen der DGL zu beliebigen Anfangswerten betrachtet, erhält mn einen Vektorraum der Dimension n (im homogenen Fall).
<u>Beweis:</u> Falls $y(x)$, $z(x)$ Lösungen sind und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\alpha y(x) + z(x) = A(x)(\alpha y(x) + z(x)) = \alpha A(x)y(x) + A(x)z(x)$$

$\Rightarrow$ Menge der Lösungen ist ein VR!
Für festes x_0 haben wir für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung. Variieren von x_0 bringt keine neuen Lösungen.
Bemerkung: Falls $b(x) \neq 0$ erhält man einen affinene Raum der Dimension

n. Hier ist der entsprechende lineare Raum der Lösungsraum der homogenen Gleichung.

1.10.1 Reduktion linearer DGL höherer Ordnung

Beispiel: $y'' = -\omega^2 y$ ist lineare DGL 2.Ordnung.

Definiere: $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \vec{v}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\omega^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}' = A\vec{v}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, dies ist eine DGL der Ordnung eins, der Lösungsraum ist 2-dimensional.

Wir betrachten das System auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$, da $\vec{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Allgemein: $y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)}$, die a_j dürfen von x abhängen.

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_0 & a_1 & a_2 & ... & ... & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = A\vec{v}$$

Lösungsraum: n-dimensional.

Fortsetzung Beispiel: $y'' = -\omega^2 y$

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}$$

Lösung: $e^{Ax} \cdot \vec{v}_0$ bzw. $e^{A(x-x_0)}\vec{v}_0$ für AWP $\vec{v}(x_0) = \vec{v}_0$

Um e^{Ax} zu bestimmen, wechseln wir in die Eigenbasis von A (bzw. Jordan-Basis). Sei T die entsprechende Trafo, so dass $TAT^{-1} = D$ diagonal ist. Die Spalten von T^{-1} sind hier die EV von A!

Lösung: Die Eigenwerte von A sind

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \; T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\omega} \\ 1 & \frac{i}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} T\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\omega} \\ 1 & \frac{i}{\omega} \end{pmatrix} \vec{v}_0$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & e^{-i\omega x} \\ i\omega e^{i\omega x} & -i\omega e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\omega} \\ 1 & \frac{i}{\omega} \end{pmatrix} \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} e^{i\omega x} + e^{-i\omega x} & -\frac{i}{\omega} e^{i\omega x} + \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} \\ i\omega e^{i\omega x} - i\omega e^{-i\omega x} & e^{i\omega x} + e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \vec{v}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\frac{1}{\omega}\sin(\omega x) \\ \omega \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix} \vec{v}_0$$

1.11 Graphisches Lösen von DGLn

Wir betrachten: $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$

Beispiel: Gedämpfte Schwingung $\ddot{x} = -\omega^2 x - \gamma \dot{x}$

o.B.d.A. können wir $\omega^2 = 1$ wählen; $\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x}$

Den allgemeinen Fall bekommen wir durch umskalieren der Zeit.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Zunächst $\gamma = 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, betrachte $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

Die Lösungen der DGL sind die Integralkurven des Vektorfeldes, d.h. die Tangenten an dei Lösungen sind parallel zu den Vektoren.

Für $\gamma > 0$:

Das lässt sich allgemein für $\dot{y} = f(y)$ anwenden. Wir zeichnen für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $f(y) \in \mathbb{R}^n$.

2 Integration im $\mathbb{R}^n$

Wir möchten die Integration nach Riemann auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ auf $n > 1$ verallgemeinern. Wie in Analysis 1 bolden wir Abschätzungen von oben und unten:

$$\text{Sei: } f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$$

Für jedes $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ definiere eine Abschätzung von oben und unten:

$$O(n_1, n_2) := \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \frac{1}{n_1 n_2} \sup\{f(x_1, x_2) :\ x_1 \in I_j,\ x_2 \in K_k\}$$

mit $I_j := [a_1 + \frac{(j-1)}{n_1}(b_1 - a_1),\, a_1 + \frac{j(b_1-a_1)}{n_1}]$

und $K_k := [a_2 + \frac{(k-1)}{n_2}(b_2 - a_2),\, a_2 + \frac{k(b_2-a_2)}{m_2}]$

analog für $U(n_1, n_2) := \dots \inf\{\dots\}$

$$O := \inf\{O(n_1, n_2) :\ (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2\}$$

$$U := \sup\{U(n_1, n_2) :\ (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2\}$$

Definition: Falls $O = U$, so nennt man f Riemann integrierbar. Der Wert des Integrals ist gleich U bzw. O:

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f d^2x = U = O$$

Falls $f : D \to \mathbb{R}$, D kompakt, $D \subset \mathbb{R}^2$ dann wähle einen Quader $Q \supset D$ und definiere:

$$\int_D f(x_1, x_2) d^2x = \int_Q f(x_1, x_2) \, \mathbb{I}_D(x_1, x_2) d^2x$$

Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $n > 2$ klar.

<u>Definition:</u> Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann nennt man $\int_D 1 d^n x$ den Jordaninhalt von D.

Bemerkung: $\int_D 1 d^n x = \int_Q \mathbb{I}_D \, d^n x$ mit $D \subset Q$

<u>Satz:</u> Sei $f : Q \to \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Quader. Falls f stetig $\Rightarrow f$ (Riemann) integrierbar.

Bemerkung: Falls f stetig, $D \in \mathbb{R}^n$ beschränkt, kann es passieren, dass $\int_D f d^n x$ nicht existiert.

<u>Beispiel:</u> $f := 1$, $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist beschränkt.

$\int_D 1 d^n x = \int_0^1 1|_{\mathbb{Q}} \, dx$, aber $U(n) = 0$, $O(n) = 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis:</u> Da f auf dem kompakten Quader Q stetig ist, ist f dort glm. stetig.

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, falls $\|x - y\|_\infty < \delta$

$\|x - y\|_\infty := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ...\}$

Falls n_1, n_2 hinreichend groß sind, gilt in jedem Teilquader $\|x - y\|_\infty < \delta$:

$n_1 > \frac{|b_1 - a_1|}{\delta}$, $n_2 > \frac{|b_2 - a_2|}{\delta}$ usw.

$\Rightarrow$ für jeden Teilquader gilt: $\sup\{f(x), \, x \in Q(j, k, ..)\} - \inf\{f(x), \, x \in Q(j, k, ..)\} \leq \epsilon$

$\Rightarrow O(n_1, n_2, ...) - U(n_1, n_2, ...) \leq \epsilon |Q|$

$\Rightarrow O - U = 0$, da:

$$0 = \inf\{O(n_1, n_2, ...) - U(n_1, n_2)\} \geq \inf\{O(n_1, n_2, ...)\} - \sup\{U(n_1, n_2, ...)\} = O - U \geq 0$$

Satz: (Monotonie des Integrals) Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^n$ Quader.

Falls $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in Q$) und f, g integrierbar:

$$\Rightarrow \int_Q f d^n x \leq \int_Q g d^n x$$

Beweis: Da $f \leq g$ gilt, sind alle Suprema und Infima auf den kleinen Teilquadern entsprechend "$\leq$":

$$\Rightarrow O^f(n_1, n_2, ...) \leq O^g(n_1, n_2, ...)$$

$$U^f(n_1, n_2, ...) \leq U^g(n_1, n_2, ...)$$

$$\Rightarrow \int_Q f\, d^n x = \inf\{O^f(n_1, n_2, ...) |\, n_1, n_2, ... \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{O^g ...\} = \int_Q g\, d^n x$$

Satz: (Linearität des Integrals): Sei $Q \in \mathbb{R}$ ein Quader, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $\lambda f + g$ integrierbar mit:

$$\int_Q (\lambda f + g) d^n x = \lambda \int_Q f\, d^n x + \int_Q g\, d^n x$$

Beweis: "λf": Jeder Schritt der Definition ist verträglich mit der Multiplikation mit λ:

$$\inf\{\lambda\, f(x) :\, x \in \text{Teilquader}\} = \lambda \inf\{f(x) ...\}$$

$$O^{\lambda f}(n_1, n_2, ...) = \lambda O^f(n_1, n_2, ...) \text{ und } U^{\lambda f}(n_1, n_2, ...) = \lambda U^f(n_1, n_2, ...)$$

$$\Rightarrow \int_Q \lambda\, f\, d^n x = \lambda \int_Q f\, d^n x$$

"$f + g$": $\vec{n} = (n_1, n_2, ...)$ so dass $O(\vec{n} \leq \int_Q f\, d^n x\, +\, \epsilon$

$\tilde{\vec{n}}$ so dass $O^g(\tilde{\vec{n}}) \leq \int_Q g\, d^n x\, +\, \epsilon$

Wählt man $\vec{m} = (m_1, m_2, ...)$ mit $m_j = n_j + \tilde{n_j}$ erhält man jeweils eine Verfeinerung.

$$O^f(\vec{m}) \leq \int_Q f\, d^n x \,+\, \epsilon;\; O^g(\vec{m}) \leq \int_Q g\, d^n x \,+\, \epsilon$$

$$O^f(\vec{m}) + O^g(\vec{m}) \geq O^{f+g}(\vec{m}) \Rightarrow O^{f+g}(\vec{m}) \leq \int_Q f\, d^n x + \int_Q g\, d^n x \,+\, 2\epsilon$$

$$\text{analog: } U^{f+g}(\vec{m}) \geq \int_Q f\, d^n x + \int_Q g\, d^n x \,-\, 2\epsilon$$

$$\Rightarrow O^{f+g} := \inf\{O^{f+g}(\vec{m}) ... \leq \int_Q f\, d^n x + \int_Q g\, d^n x$$

$$U^{f+g} := \sup\{U^{f+g}(\vec{m}) ... \geq \int_Q f\, d^n x + \int_Q g\, d^n x$$

Da $U^{f+g} \leq O^{f+g} \;\Rightarrow$ jeweils -"

<u>Satz:</u> (Fubini) Sei $Q = A \times B$ mit A Quader in $\mathbb{R}^n$, B Quader in $\mathbb{R}^m$. Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Außerdem existiere für jedes $y \in B$ das Integral:

$$\int_A f(x, y)\, d^n x := F(y)$$

sowie:

$$\int_B F(y)\, d^m y$$

Dann gilt:

$$\int_Q f\, d^{n+m} x = \int_B F(y)\, d^m y$$

Bemerkung: $m = n = 1$: linke Seite ist 2-dim. Integral. Die rechte Seite besteht aus 2 hintereinader ausgeführten Integralen in $\mathbb{R}$. Diese könne wir häufig bestimmen (Stammfunktion finden, etc.).

<u>Vorsicht:</u> Wenn $F(y)$ existiert (d.h. $f(x, y)$ für jedes y integrierbar ist) und $\int_B F(y)\, d^m y$ existiert, muss $f(x, y)$ über Q nocht unbedingt integrierbar sein.

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \{-1, 1\}$, $Q = [-1, 1] \times [0, 1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (x > 0 \text{ und } y \in \mathbb{Q}) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } y \notin \mathbb{Q}) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(y) = 0 \Rightarrow \int_0^1 F(y)\, dy = 0$$

In jedem Teilquader existieren Punkte, deren Funktionswerte +1 sind und Punkte, deren Funktionswerte -1 sind.

Beweis Fubini: Betrachte $\int_Q f\, d^{n+m}x$
Wähle $\vec{n}$ so, dass $O^f(\vec{n}) \leq \int_Q f\, d^{n+m}x + \epsilon$ für $\epsilon > 0$ beliebig.
$(\forall \epsilon > 0\ \exists \vec{n}$ so dass $O^f(\vec{n}) \leq \int f + \epsilon)$
Die entsprechende Stufenfunktion liegt überhalb von f,
$f_{\vec{n}} \geq f$ mit $f_{\vec{n}}(x) = \sup\{y$ im Teilquader, der auch x enthält$\}$

$$f_{\vec{n}} \text{ ist Stufenfunktion, } \int_B f_{\vec{n}}(x,y)\, d^n x \geq \int_B f(x,y)\, d^n x = F(y) \text{ (Monotonie)}$$

$$O^f(\vec{n}) = \int_A (\int_B f_{\vec{n}}(x,y)\, d^n x)\, d^m y \geq \int_A F(y) d^m y$$

$$\Rightarrow \int_A F(y)\, d^m y \leq \int f\, d^{n+m}x + \epsilon \text{ und } \int_A F(y)\, d^m y \geq \int f = \epsilon$$

a) Beispiel:

$$\int_{[0,1]^2} y\cos(xy) d^2x = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} y\cos(xy) dx\, dy = \int_{[0,1]} [\sin(xy)]_0^1$$

$$= \int_{[0,1]} \sin(y) dy = -[\cos(y)]_0^1 = 1 - \cos(1)$$

b) Beispiel: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
Diese Funktion ist bei $(0,0)$ unbeschränkt, daher nicht integrierbar im eigentlichen Sinne. Zunächst die eine, dann die andere Integration lässt sich jedoch

ausführen. Die Integral existieren zum Teil nur uneigentlich. Zunächst:

$$\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy) dx 0 \int_0^1 [\frac{y}{x^2+y^2}]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Aus Symmetriegründen ist:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\, dy = -\frac{\pi}{4}$$

2.1 Weitere Eigenschaften des Integrals

Wir beschäftigen uns weiterhin mit eigentlichen Integralen. Die integrierbaren Funktionen sind immer beschränkt.

Satz: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert eine Folge $(\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ $(Q \subset \mathbb{R}^d)$, so dass:

$$\lim_{k\to\infty} O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k}) = 0$$

und umgekehrt.

Beweis: Integrierbar ist per Definition gleichbedeutend mit:

$$O = \inf\{O^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^d\} = \sup\{U^f(\vec{m}) : \vec{m} \in \mathbb{N}^d\} = U$$

$$\Rightarrow \exists (\vec{m_k})_{k\in\mathbb{N}}, (\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \lim_{k\to\infty} O^f(\vec{n_k}) = \lim_{k\to\infty} U^f(\vec{m_k})$$

d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{m_k}) = 0$
Sei $\tilde{\vec{n_k}} \in \mathbb{N}^d : (\tilde{\vec{n_k}})_j := (n_k)_j (m_k)_j$ $(\vec{n_j} = \vec{n_k}\vec{m_k}$ komponentenweise)

$$\Rightarrow O^f(\tilde{\vec{n}}) \le O^f(\vec{n}),\ U^f(\tilde{\vec{n}}) \ge U^f(\vec{m})$$

$$\Rightarrow O^f(\tilde{\vec{n_k}}) - U^f(\tilde{\vec{n_k}}) \le O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{m_k}) \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow (\tilde{\vec{n_k}}) - U^f(\tilde{\vec{n_k}}) \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

Umkehrung ist direkt: $\lim\limits_{k\to\infty} O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k}) = 0$

$$\inf\{O^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^\delta\} \leq \inf\{O^f(\vec{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$$

$$\sup\{U^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^\delta\} \geq \sup\{U^f(\vec{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$$

Außerdem gilt:

$$\{O^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^\delta\} \supset \{O^f(\vec{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$$

$$\{U^f(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^\delta\} \supset \{U^f(\vec{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow O = U$$

<u>Satz:</u> Sei $f : Q \to \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^d$ integrierbar, dann ist auch $f^+ : Q \to \mathbb{R}$ und $f^- : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Hier ist $f^{+/-}$ der positive/negative Anteil der Funktion f:

$$f^+ := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f^- := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> f integrierbar $\Rightarrow \exists (\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^\delta$ mit:

$$\lim_{k\to\infty} O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k}) = 0$$

Wir vergleichen $O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k})$ mit $O^{f^+}(\vec{n_k}) - U^{f^-}(\vec{n_k})$. Für jeden einzelnen Balken gilt, dass die Differenzen von oberer und unterer Abschätzung nicht größer wird.

<u>Fall 1:</u> $\sup\{f(x) : x \in q\} > 0,\ \inf\{f(x) : x \in q\} > 0$ für Teilquader q, dann ist:

$$\sup\{f(x) : x \in q\} - \inf\{f(x) : x \in q\} = \sup\{f^+(x) : x \in q\} - \inf\{f^+(x) : x \in q\}$$

2. Fall: $\sup\{...\} > 0,\ \inf\{...\} < 0$

$$\Rightarrow \sup\{f(x) : x \in q\} = \sup\{f^+(x) : x \in q\}$$

$$0 > \inf\{f(x) : x \in q\} < \inf\{f^+(x) : x \in q\} \geq 0$$

3. Fall: $\sup\{...\} < 0,\ \inf\{...\} < 0$

$$\Rightarrow f^+ \equiv 0 \text{ auf } q \Rightarrow 0 \leq O^{f^+}(\vec{n_k}) - U^{f^+}(\vec{n_k}) \leq O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow O^{f^+}(\vec{n_k}) - U^{f^+}(\vec{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow f^+$ integrierbar (analog für f^-)

Sazt: Seien D_1, D_2 beschränkt, $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dann gilt:

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D_1} f(x)\,dx + \int_{D_2} f(x)\,dx$$

falls die rechte Seite existiert.

Beweis: Dies ist ein Sonderfall von $\int f + g = \int f + \int g$:

$$\int_D f(x)\,dx := \int_Q \mathbb{I}_D(x)\,f(x)\,dx = \int_Q [\mathbb{I}_{D_1}(x) + \mathbb{I}_{D_2}(x)]\,f(x)\,dx$$

$$= \int_Q \mathbb{I}_{D_1}(x)\,f(x)\,dx + \int_Q \mathbb{I}_{D_2}(x)\,f(x)\,dx = \int_{D_1} f(x)\,dx + \int_{D_2} f(x)\,dx$$

Wobei $D \subset Q$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ Quader.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan messbar, f sei integrierbar. Dann gilt:

$$|D| \inf\{f(x) : x \in D\} \leq \int_D f(x) d^n x \leq |D| \sup\{f(x) : x \in D\}$$

$|D|$ ist hier das Jordan-Maß von D.

Beweis: Direkte Konsequenz aus der Monotonie:

$g : D \to \mathbb{R}$ sei definiert als $g \equiv \sup\{f(x) : x \in D\}$ auf D

$$g \geq f \text{ (auf } D) \Rightarrow g\,\mathbb{I}_D \geq f\,\mathbb{I}_D$$

$$\Rightarrow \int_D g(x)\,d^n x = \sup\{f(x) : x \in D\} \int_Q \mathbb{I}_D d^n x = \sup\{f(x) : x \in D\}\,|D| \overset{\text{Monotonie}}{\geq} \int_D f(x)\,d^n x$$

andere Abschätzung analog.

Satz (Mittelwertsatz): Sei D wegzusammenhängend, Jordan messbar und abgeschlossen. $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists \xi \in D \text{ mit } f(\xi)\,|D| = \int_D f(x)\,d^n x$$

Beweis: D kompakt, da beschränkt und abgeschlossen

$$\Rightarrow f \text{ hat auf } D \text{ ein Maximum und Minimum}$$

$$\Rightarrow \exists M \in D \text{ mit } f(M)\,|D| \geq \int_D f(x)\,d^n x$$

$$\exists m \in D \text{ mit } f(m)\,|D| \leq \int_D f(x)\,d^n x$$

Sei $\gamma : 0,1 \to D$ eine Kurve mit $\gamma(0) = m$, $\gamma(1) = M$. Nach Zwischenwertsatz gibt es ein t mit $f(\gamma(t)) = \int_D \frac{f(x)\,d^n x}{|D|}$.

$$\gamma(t) = \xi,\ f(\xi)\,|D| = \int_D f(x)\,d^n x$$

Satz: $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, $Q \in \mathbb{R}$ Quader. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $g \circ f$ auf Q integrierbar.

Beweis: Integrierbarkeit: $\exists (\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} O(\vec{n_k}) - U(\vec{n_k}) = 0$

z.z.: $\forall \epsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $O^{g\circ f}(\vec{n_k}) - U^{g\circ f}(\vec{n_k}) < \epsilon\ \forall k \geq k_0$ für geeignete

Folge $(\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\forall \eta > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ so dass } |g(y) - g(z)| < \eta, \text{ falls } |y - z| < \delta$$

und $y, z \in I$, I ist hier das kompakte Intervall $[\inf\{f(x) : x \in Q\}, \sup\{f(x) : x \in Q\}]$

$$\sup\{g \circ f(x) : x \in q\} - \inf\{g \circ f(x) : x \in q\} \leq \eta \text{ falls } \sup\{f(x) : x \in q\} - \inf\{f(x) : x \in q\} \leq \delta$$

Bedingung: $\forall \tau > 0 \exists k_0 : O^f(\vec{n_k}) - U^f(\vec{n_k}) < \tau \; \forall k \geq k_0$
Wähle $\tau = \eta\, \delta$ und das entsprechende k_0. Es gibt nun 'Säulen', deren Differenzen größer sind als δ. Deren 'Anzahl' ist aber klein: Zerlege Q in zwei Teile, einen Teil, in dem die Differenz zwischen O und U je kleiner als δ ist, und $\geq \delta$ im anderen Teil. $Q = Q^{<\delta} \cup Q^{\geq\delta}$

$$|Q^{\geq\delta}|\, \delta \leq \eta\, \delta \Rightarrow |Q^{\geq\delta} \leq \eta$$

$$\int_Q g \circ f(x)\, d^n x = \int_{Q^{\leq\delta}} g \circ f(x)\, d^n x + \int_{Q^{<\delta}} g \circ f(x)\, d^n x$$

$$\int_{Q^{\geq\delta}} g \circ f(x)\, d^n x \begin{cases} \leq |Q^{\geq\delta}| \sup\{g \circ f(x) : x \in Q\} \\ \geq |Q^{\geq\delta}| \inf\{g \circ f(x) : x \in Q\} \end{cases}$$

Da f beschränkt und g stetig, ist $g \circ f$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists C \text{ mit } |\int_Q g \circ f(x)\, d^n x| \leq C\, \eta$$

$$\int_{Q^{<\delta}} g \circ f(x)\, d^n x \leq \eta\, |Q|$$

Wähle $\eta = \frac{\epsilon}{|Q|+C}$.

2.2 Uneigentliche Integration

Bisher hatten wir Integration so definiert, dass f und D bzw. Q je beschränkt sein müssen. Für beide Fälle wollen wir den Integrationsbegriff erweitern.

Definition: $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Quader, $Q_{n+1} \supset Q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ ist uneigentlich integrierbar

$$:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(\vec{x})\, d^d x \text{ existiert im eigentlichen Sinne}$$

Falls $\int_{\mathbb{R}^d f^+ \, d^d x}$ bzw. $\int_{\mathbb{R}^d f^- \, d^d x}$ im eigentlichen Sinne existieren, dann ist:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) \dot{d}^d x = \int f^+ + \int f^-$$

Bemerkung: Die Einschränkung auf nicht negative (nicht positive) Funktionen hat dne Vorteil, dass $\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) d^d x$ nicht von der Wahl der Quader abhängig. Falls f allgemein gewähkt wird, kann der Liems von der Wahl der $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängen.

Bemerkung: Damit $\int_{Q_n} f(x)\, d^d x$ existiert, reicht, dass $\int_{Q_n} f(x)\, d^d x$ beschränkt bleibt, da $I_n := \int_{Q_n} f(x)\, d^d x$ monoton ist. (Falls f nicht negativ oder nicht positiv.)

Beweis: (Unabhängigkeit von der Wahl der Quader)

Sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigende Folgen von Quadern. Wir wollen zeigen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(x)\, d^d x = \lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(x)\, d^d x \quad \text{falls } \lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} P_n (= \mathbb{R}^d)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $P_n \subset Q_m$, da jede Ecke von P_n irgendwann in einem Q_j enthalten ist. Es gibt endlich viele Ecken $d \Rightarrow$ Behauptung.

Wegen der Monotonie gilt (hier $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$):

$$\int_{P_n} f(x)\, d^d x \leq \int_{Q_m} f(x)\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(x)\, d^d x$$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{P_n} f(x)\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(x)\, d^d x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(x)\, d^d x \leq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(x)\, d^d x$$

Man kann oben einfach die Rolle von P und Q vertauschen und erhält analog:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(x)\, d^d x \geq \lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} f(x)\, d^d x$$

$\Rightarrow$ '=' Gleichheit beider Seiten
Dieses Argument gilt auch für uneigentliche Limiten, d.h. wenn man $\lim\limits_{n\to\infty} ... = \infty$ zulässt. Die Frage, o $\lim\limits_{n\to\infty} \int_P Q_n f(x)\, d^d x$ existiert, hängt also auch nicht von der Wahl der Folge der Qauder $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

$$\int_D f(x)\, d^d x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_D(x)\, f(x)\, d^d x$$

Ein weiteres Problem für Integrierbarkeit besteht, falls f auf D unbeschränkt ist. Das war schon in Ana 1 so:
Beispiel: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ist im eigentlichen Sinne nicht definiert, da $U < \infty$ aber $O = +\infty$
Lösung: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon\to 0} [2\sqrt{x}]_\epsilon^1 = 2$
Man schneidet also so, dass man $\forall \epsilon > 0$ eine beschränkte Funktion erhält. Ähnlich gehen wir bei Funktionen mehrer Variablen vor.

Definition: Sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge, $Q_{n+1} \subset Q_n$, von Quadern. $f : D \to \mathbb{R}_0^+$. Wir definieren das uneigentliche Integral

$$\int_D f(x)\, d^d x := \lim_{n\to\infty} \int_{D\setminus Q_n} f(x)\, d^d x$$

Wir benötigen dazu $D \cap \lim_{n\to\infty} Q_n = D \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \emptyset$. Wie oben definiert man das uneigentliche Integral für allgemeines f durch $\int f = \int f^+ + \int f^-$.

Bemerkung: Der Satz von Fubini lässt sich auf uneigentliche Integrale erweitern. Falls z.B. f unbeschränkt ist: Wähle Q_n so, dass

$$\int_D f(x)\, d^d x - \int_{D\setminus Q_n} d^d\, x < \epsilon$$

für $f : D \to \mathbb{R}_0^+$.
Für $\int_{D\setminus Q_n}$ benutze Fubini, danach bilde den Limes $\epsilon \to 0$.

3 Transformationssatz

In der Ana 1 gab es die Substitutionsregel:
z.B.:

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx;\ u = x^2,\ \frac{du}{dx} = 2x,\ 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx = \int_0^\infty du e^{-u} = 1$$

<u>Definition:</u> Eine Abbildung $\phi : D \to W$ mit $d, W \subset \mathbb{R}^d$ offen, heißt Diffeomorphismus

$$:\Leftrightarrow \phi \text{ bijektiv und sowohl } \phi \text{ als auch } \phi^{-1} \text{ stetig diffbar}$$

<u>Satz:</u> (Transformationsformel) Seien $D, W \subset \mathbb{R}^d$, offen und Jordan messbar, $\phi : D \to W$ ein Diffeomoephismus. Sei $f : W \to \mathbb{R}^d$ eine integrierbare Funktion.

Dann gilt die Transformationsformel:

$$\int_{\phi^{-1}(W)} f(\phi(t))|\det(\phi'(t))|d^d t = \int_W f(x)\, d^d x$$

<u>Anwendung:</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = ?$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy} = \star$$

$$\int_{Q_R} e^{-x^2-y^2} d^2x = I_R^Q, \quad \int_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2} d^2x = I_R^K$$

mit $K_R(0)$ Kreis um den Ursprung mit Radius R.

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2} d^2x = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2} d^2x$$

Für R fest. aber beliebig, nutze Trafo-Formel.

$$(\varphi, r) \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det\phi' = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r$$

$$\star = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2}|-r|dr\, d\varphi = \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2\pi r e^{-r^2}\, dr = \lim_{R\to\infty} [-\pi e^{-r^2}]_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} (-\pi e^{-R^2} + \pi) = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

<u>Beweis des Transformationssatzes:</u> Strategie: Es reicht zu zeigen, dass der Trafosatz für konstante Funktionen gilt! Eine allgemeine Funtkion nähern wir von

unten und oben durch Treppenstufen an. Letztere sind Summen konstanter Funktionen.

$$U(\vec{n}) \leq \int_W f(x)\, d^d x \leq O(\vec{n})$$

$$\lim_{k\to\infty} U(\vec{n_k}) - O(\vec{n_k}) = 0 \text{ für geeignete Folge } (\vec{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

<u>Lemma:</u> Die Trafoformel gilt für $f \equiv 1$ und $W = Q$ Quader, $\phi(x) = Ax + b$.

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus der linearen Algebra mit oben besprochen:

$$\int_Q f(x)\, d^d x = |\det(A)|\, |\phi^{-1}(Q)| = |Q|$$

<u>Lemma 2:</u> Die Trafoformel gilt für Diffeomorphismus ϕ.
<u>Beweis:</u> <u>W.A.:</u> $\exists \delta > 0$, so dass $\left| |Q| - \int_{\phi^{-1}(Q)} |\det \phi'(t)| dt \right| > \delta$
Wir zerlegen Q in zwei Teilquader. Die Differenzen in mindestens einem der beiden Teilquader muss ebenfalls größer als $\frac{\delta}{2}$ sein. Diesen Schritt kann man beliebig oft wiederholen und erhält eine Folge immer kleiner werdender Teilquader:

$$\exists (q_k)_{k\in\mathbb{N}}, \text{ Folge von Teilquadern von } Q \text{ mit:}$$

$$\text{a) } |q_k| = |Q| 2^{-k}$$

$$\text{b) Durchmesser der Teilquader } q_k \text{ geht gegen } 0$$

$$\text{c) } \left| |q_k| - \int_{\phi^{-1}(q_k)} |\det \phi'(t)|\, d^d t \right| > \delta\, 2^{-k} \Leftrightarrow \left| |Q| - 2^k \int_{\phi^{-1}(q_k)} |\det \phi'(t)|\, d^d t \right| > \delta$$