Ana2-Blatt 1 – Lösungsskizze

Aufgabe 4

Seien $x_0 \in X$, $y \in X$ beliebig und fix. Zeige $f(y) = f(x_0)$.
Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto x_0(1-t) + yt, \end{aligned}$$

welche zwischen x_0 und y interpoliert. Wir bemerken, dass g stetig bzgl. der Standardmetrik auf $[0,1]$ ist, da

$$\begin{aligned} \forall s,t \in [0,1]: \quad d_{\text{eukl}}\left(g(s), g(t)\right) &= \|x_0(t-s) - y(t-s)\|_{\text{eukl}} \\ &\leq |t-s| \, \|x_0 - y\|_{\text{eukl}}. \end{aligned}$$

Ferner betrachte

$$\begin{aligned} &T := \sup G, \\ &G := \{t \in [0,1] \mid \forall \tau \in [0,1], \tau \leq t : \; f\left(g(t)\right) = f(x_0)\} \end{aligned}$$

und zeige für die gewünschte Aussage $T = 1$:

- $G \neq \emptyset$, da $t = 0 \in G$,
- $T \in G$, da es eine Folge $(t_n)_n \subset G$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} t_n = T$ und für diese aufgrund der Stetigkeit von f gilt
$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{f\left(g(t_n)\right)}_{=f(x_0)} = f\left(g(T)\right),$$
- Angenommen $T < 1$, dann gilt wegen der $\varepsilon - \delta$ Stetigkeit bzgl. d_{eukl} und d_d von f in $g(T) \in X$
$$\exists \delta > 0 : x \in B^{\text{eukl}}_{g(T)}(\delta) \implies f(x) = c.$$
Ebenso gilt wegen der Stetigkeit von g
$$\exists \eta > 0 : t \in (T - \eta, T + \eta) \implies f\left(g(t)\right) = c,$$
was den gewünschten Widerspruch darstellt zu $T = \sup G$.