Klausur Analysis II/Mathematik f. Physiker III

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

8. Februar 2021

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlossenem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.

Name, Vorname:..

Matrikelnummer:..

Studienfach:...

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \left(x^2 - 2y\right) e^{x-y} .$$

Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion und klassifizieren Sie diese.

Aufgabe 2: Gegeben Sei die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$. Bestimmen Sie die Länge des Graphen von f.

Aufgabe 3: Zeigen oder wiederlegen Sie: Falls $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist, dann ist f im Punkt $(0, 0)$ auch stetig.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) = -y(x) + x .$$

Zeigen Sie: $y(x) = x$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung. Finden Sie nun die Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 5: Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller auf dem Interval $[0, 1]$ stetigen Funktionen, sowie die Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ gegeben durch $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t$ und $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \{|f(t)|\}$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge, $f \in \mathcal{S}$.

Zeigen Sie: Falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich des von $\| \cdot \|_\infty$ induzierten Abstandsbegriffes gegen f konvergiert, so gilt dies auch bezüglich des von $\| \cdot \|_1$ induzierten Abstandsbegriffes. Widerlegen Sie die Umkehrung dieser Aussage, d.h. wiederlegen Sie die Aussage

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 ,$$

mit Hilfe eines Gegenbeispiels.