Klausur Analysis II/Mathematik f. Physiker III

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

11. April 2021

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlossenem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.

Name, Vorname:...

Matrikelnummer:..

Studienfach:...

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^x \ .$$

Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion und klassifizieren Sie diese.

Aufgabe 2: Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix} .$$

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie das Arbeitsintegral von F entlang der Kurve γ.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$. Geben Sie eine Metrik $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ an, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen gewählte Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = 4y^{1/2}x$. Finden Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert $y(1) = 1$.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass die Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöff für die Differentialgleichung von Aufgabe 4 nicht erfüllt sind.

Geben Sie eine weitere Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 0$ an.

Bemerkung: Die in 4 gefundene Lösung sollte bereits $y(0) = 0$ erfüllen. Sollte dies bei Ihnen nicht der Fall sein, reicht es, wenn Sie hier eine Lösung angeben, die $y(0) = 0$ erfüllt.