Probeklausur zur Analysis II

Peter Pickl, Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

February 2, 2022

Aufgabe 1: Sei V ein Vektorraum, $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Normen auf V. Zeigen Sie: $\|\cdot\|_c : V \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $\|x\|_c = (\|x\|_a \|x\|_b)^{1/2}$ ist ebenfalls eine Norm.

Beweisen Sie dann, dass jede bezüglich $\|\cdot\|_a$ beschränkte und bezüglich $\|\cdot\|_b$ konvergente Folge auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_c$ konvergiert.

Aufgabe 2: Es sei $M := \{(x,y) : x^2 + 3y^2 = 12\}$ und $f : M \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = e^{x^2+6y}$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f und die Funktionswerte von f an diesen Punkten.

Geben Sie jeweils die Art des kritischen Punktes an.

Aufgabe 3: Sei $Q := [0,1]^2$, $f : Q \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2) = 4x_1x_2e^{x_1^2+x_2^2}$. Existiert das Integral $I := \int_Q f(x)d^2x$? Begründen Sie Ihre Aussage.

Bestimmen Sie nun en Wert von I unter Angabe des dazu relevanten Satzes und Überprüfung der im Satz geforderten Bedingungen.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = e^{-|y(x)|}x^3 \; .$$

Überprüfen Sie diese Differentialgleichung auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

Zeigen Sie: Jede Lösung der Differentialgleichung hat genau einen kritischen Punkt, nämlich ein Minimum bei $x = 0$.

Finden Sie die Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 0$.

Aufgabe 5: Gegeben sei das Vektorfeld $B : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ durch $B(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ sowie der Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Arbeitsintegral (Kurvenintegral 2. Art) von B entlang des durch γ gegebenen Weg.

Hinweis: Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. In der Klausur dürfen Sie Schriebzeug und ein selbst beschriebenes A4-Blatt (beidseitig beschriftet) verwenden. Taschenrechner wird nicht notwendig sein, dürfen Sie aber mitbringen.