gilt und schließe nun, dass

$$d(\varphi^t(x), p) \leq |\varphi^t(x) - \varphi^{t-t_j}(y)| = |\varphi^{t-t_j}(x_j) - \varphi^{t-t_j}(y)| < \varepsilon$$

ist, denn $0 \leq t - t_j \leq C$. Also ist

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi^t(x), p) = 0$$

und der Satz bewiesen.

$\square$

§7. Himmelsmechanik

Wir haben in §3 das Schwerefeld der Sonne $G_S : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ besprochen, was so viel bedeutete, dass die Sonne, lediglich durch ihre (schwere) Masse $m_S > 0$, an jedem Ort $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ auf einen (punktförmig gedachten) Körper der Masse $m > 0$ eine Kraft $F = m G_S$ ausübt. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist dann die Bewegung des Körpers durch die Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = m G_S(x)$$

gegeben. Wir hatten aus den Keplerschen Gesetzen auch geschlossen, dass

$$G(x) = -c_S \frac{x}{|x|^3}$$

sein müsste, wobei $c_S > 0$ eine Konstante ist, die nur von der Masse der Sonne abhängt. Bei alledem haben wir die approximativ richtige Annahme gemacht, dass die Sonne selbst sich nicht bewegt, sondern im Ursprung ruht. Das gleiche Schweregesetz wird nun aber auch für jeden Planeten gelten, etwa wenn man sich für die Bewegung eines seiner Monde interessiert. Im Prinzip zumindest löst aber auch das Schwerefeld sagen wir der Erde eine Bewegung der Sonne aus. Nun wird die Kraft auf die Sonne gerade $F_S = m_S G_E$ sein, wo nun

$$G_E(x) = -c_E \frac{x - x_E}{|x - x_E|^3}$$

das Gravitationsfeld der Erde ist, $x_E \in \mathbb{R}^3$ der Aufenthaltsort der Erde und $c_E > 0$ eine Konstante, die nur von der (schweren) Masse $m_E > 0$ der Erde abhängt. Ist also die Sonne am Punkt x_S und die Erde am Punkt x_E, so übt die Sonne eine Kraft

$$F_E = -c_S m_E \frac{x_E - x_S}{|x_E - x_S|^3}$$

auf die Erde aus, während die Erde eine Kraft

$$F_S = -c_E m_S \frac{x_S - x_E}{|x_S - x_E|^3}$$

auf die Sonne ausübt. Das 3. Newtonsche Gesetz besagt nun gerade, dass die Kräfte F_E und F_S vom Betrage gleich und von der Richtung entgegengesetzt sein müssen („Actio = Reactio"),

$$F_S + F_E = 0, \tag{1}$$

was es uns nun ermöglicht, die Konstanten c_S, $c_E > 0$ zu bestimmen. Da c_S nur von m_S und c_E nur von m_E abhängt, gibt es also eine (universelle) Konstante $\gamma > 0$, so dass

$$c_S = \gamma m_S, \quad c_E = \gamma m_E$$

sein muss. Damit wird also nun das Bewegungsproblem zu dem System

$$m_S \ddot{x}_S = -\gamma m_S m_E \frac{x_S - x_E}{|x_S - x_E|^3}$$

$$m_E \ddot{x}_E = -\gamma m_E m_S \frac{x_E - x_S}{|x_E - x_S|^3}.$$

Kürzt man in der 1. Gleichung die träge Masse gegen die schwere Masse der Sonne heraus, so bleibt für die Bewegung der Sonne in der Tat nur noch ein „kleines" Feld G_E übrig, während in der 2. Gleichung die Masse der Erde „herausfliegt" und tatsächlich ein „merkliches" Schwerefeld G_S der Sonne übrig bleibt. Die Annahme zur ~~Her~~ Herleitung der Keplerschen Gleichung war also in dem Sinne gerechtfertigt.

Wollen wir aber nun die Bewegung zweier Himmelskörper mit vergleichbaren Massen untersuchen, die nur ihrer gegenseitigen Massenanziehung unterliegen, so können wir obige Diskussion übernehmen und erhalten dann für die Position $x_1 \in \mathbb{R}^3$ des ersten Körpers mit Masse $m_1 > 0$ und für die Position $x_2 \in \mathbb{R}^3$ des zweiten Körpers mit Masse $m_2 > 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3}, \end{aligned} \qquad (2)$$

Besser ist der Standpunkt, dass der Anomalie ... Gleichheit von trägen und schwerer Masse in der Grav.-konstante steckt

wobei wir nun die Konstante $\mu > 0$ als $\mu = 1$ angenommen haben. Das können wir nach einer Reskalierung der Zeit (oder auch des Raumes, wenn man sich erinnert, dass wir die Zeitskalierung bereits benutzt haben, um das Verhältnis von trägen zu schweren Masse auf 1 zu bringen) durchaus machen. Das heißt natürlich nichts weiter, als dass wir eine andere Zeit- (bzw. Längen-) Einheit festlegen.

Man bezeichnet das Gesetz

$$F \sim m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3},$$

was die Anziehungskraft zwischen zwei

Körpern am Ort x_1, x_2 mit Massen $m_1, m_2 > 0$ beschreibt, als das universelle Gravitationsgesetz. Es wurde ebenfalls von J. Newton (auf der Grundlage der Keplerschen Gesetze) gefunden und bildet zusammen mit seinen drei schon beschriebenen, grundlegenden Gesetzen der klassischen Mechanik die Grundlage für die Himmelsmechanik.

Man nennt die Gleichung (2) das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik. Wir werden die Lösung dieses Problems wegen der Existenz einiger 1. Integrale auf das Keplerproblem zurückführen. Vorher aber fällt es ~~es~~ jetzt nicht mehr schwer, auch das dynamische System zu beschreiben, welches die Bewegung von N Himmelskörpern ($N \geq 2$), die mit ihrer gegenseitigen Gravitation unterliegen. Sind nämlich ~~$x_j \in \mathbb{R}^3$~~ $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \ldots, N$) die Positionen der N Körper mit Massen $m_j > 0$, so üben auf den j-ten Körper ~~am~~ ~~Ort~~ die anderen $N-1$ Körper die Kraft

$$F_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} F_{jk}$$

aus, wo

$$F_{jk} = -m_j m_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3}$$

ist, so dass die Bewegungsgleichungen für $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^3$ zu dem System

$$m_j \ddot{x}_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} m_j m_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} \qquad (3)$$

$(j = 1, \ldots, N)$, werden. Hier haben wir angenommen, dass sich die Kräfte, die von den einzelnen Himmelskörpern ausgeübt werden, additiv überlagern. Man kann das System (3) noch etwas leichter einprägsam schreiben, wenn man die so genannte potentielle Energie V,

$$V(x_1, \ldots, x_N) = - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{m_j m_k}{|x_j - x_k|},$$

einführt. Dann ist nämlich

$$F_j = - D_{x_j} V,$$

wobei wir nun mit D_{x_j} die drei partiellen Ableitungen

$$D_{x_j} = (D_{x_j^1}, D_{x_j^2}, D_{x_j^3})$$

bezeichnen, denn

$$D_j(|x_j - x_k|) = - \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3}.$$

Daher wird Gleichung (3) zu

$$m_j \ddot{x}_j = - D_{x_j} V \qquad (4)$$

$(j = 1, \ldots, N)$ bzw., wenn man möchte, zu den

3N skalaren Gleichungen

$$m_j \ddot{x}_j^k = -D_{x_j^k} V,$$

($j = 1, \dots, N$, $k = 1,2,3$). Man nennt (4) das N-Körperproblem der Himmelsmechanik. Es ist für $N \geq 3$ weitgehend ungelöst in dem Sinne, dass man auch qualitativ nur von ganz wenigen Anfangsbedingungen etwas über die Bahn weiß.

Der Phasenraum dieses Systems ist ja denn auch beträchtlich groß. Immerhin braucht man für die Beschreibung des Systems 3N Ortskoordinaten ($x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^3$) so wie 3N Geschwindigkeitskoordinaten ($\dot{x}_1^1, \dots, \dot{x}_N^3$), wobei die Ortskoordinaten noch der Bedingung unterliegen, dass niemals $x_i = x_j$ in $\mathbb{R}^3$ für $i \neq j$ gelten darf, denn das beschreibt offenbar einen Zusammenstoß des i-ten mit dem j-ten Körper. Wir setzen also den Konfigurationsraum

$$Q := \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N : x_i \neq x_j, \text{ für } 1 \leq i < j \leq N\}$$

und den Phasenraum zu

$$\Omega := Q \times \mathbb{R}^{3N} \subseteq \mathbb{R}^{6N}$$

fest, und sehen, dass V gerade auf Q definiert ist und (4) ein dynamisches System auf Ω definiert.

Machen wir uns auf die Suche nach 1. Integralen für das System. Als Bewegungsenergie (oder kinetische Energie) des j-ten Körpers bezeichnet man die Funktion $T_j : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$T_j(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m_j |\dot{x}_j|^2$$

und mit

$$T = \sum_{j=1}^{N} T_j$$

die gesamte Bewegungsenergie des Systems. Die Gesamtenergie, kurz: die Energie, ist dann durch die Summe

$$E = T + V$$

gegeben. Sie ist ein 1. Integral, wie wir gleich sehen werden. Die nächsten 1. Integralen resultieren aus dem 3. Newtonschen Gesetz (1), nämlich dass die Gesamtheit der angreifenden Kräfte F_{ij} verschwindet

$$\sum_{i \neq j} F_{ij} = 0. \qquad (5)$$

Hier bezeichnet F_{ij} die Kraft, die der j-te Körper auf den i-ten ausübt, also nach Newton

$$F_{ij} = -m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} = -F_{ji}.$$

Damit ist (5) tatsächlich richtig, denn

für jede ~~Paar~~ 2-elementige Teilmenge $\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,N\}$ gibt es offenbar zwei Summanden, in denen i und j auftritt, nämlich F_{ij} und F_{ji}. Gleichung (5) führt zur Bewegungsinvarianz einer vektorwertigen Abbildung $P: \Omega \to \mathbb{R}^3$, die man dadurch erklärt, dass man $P_j: \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$P_j(x,\dot{x}) = m_j \dot{x}_j$$

den Impuls des j-ten Körpers nennt und

$$P := \sum_{j=1}^{N} P_j$$

den Gesamtimpuls (kurz: den Impuls) des Systems.

Schließlich führt man auch für jeden Körper den Drehimpuls (bzgl. $0 \in \mathbb{R}^3$) $L_j: \Omega \to \mathbb{R}^3$ durch

$$L_j(x,\dot{x}) = m_j x_j \times \dot{x}_j$$

ein und nennt $L: \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$L = \sum_{j=1}^{N} L_j$$

den Gesamtdrehimpuls (kurz: den Drehimpuls) des Systems. Es gilt nun:

(7.1) Satz (Erhaltungssätze). Die Energie E, der Impuls P und der Drehimpuls L sind 1. In-

Integrale für das N-Körperproblem. (4)

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt}E(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{N}\tfrac{1}{2}m_j|\dot{x}_j(t)|^2 + V(x(t))\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j\langle \dot{x}_j,\ddot{x}_j\rangle + \sum_{j=1}^{N}\langle D_{x_j}V(x),\dot{x}_j\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\langle \dot{x}_j, -D_{x_j}V(x)\rangle + \langle D_{x_j}V(x),\dot{x}_j\rangle = 0.$$

Weiterhin ist:

$$\frac{d}{dt}P(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\sum_j m_j\dot{x}_j = \sum_j m_j\ddot{x}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} F_{jk} = \sum_{i\neq j} F_{ij} = 0,$$

und schließlich ist

$$\frac{d}{dt}L(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\sum_j m_j x_j\times\dot{x}_j = \sum_j m_j(\dot{x}_j\times\dot{x}_j$$

$$+ x_j\times\ddot{x}_j).$$

Nun zeigt zwar $\ddot{x}_j$ nicht mehr wie in §3 in x_j-Richtung. Es gibt aber wiederum für $j\neq k$ genau zwei Summanden, die sich einander gegenseitig wegheben, weil $x_k\times x_j = -x_j\times x_k$ ist:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j\times m_j\ddot{x}_j = \sum_j\sum_{\substack{k\\k\neq j}} x_j\times\frac{x_j-x_k}{|x_j-x_k|^3}m_jm_k =$$

$$\sum_{j\neq k} m_j m_k \frac{x_j \times x_k}{|x_j - x_k|^3} = 0 .$$

$\boxtimes$

Zu einer anderen Formulierung des Impulserhaltungssatzes gelangt man, wenn man für jede Konfiguration $x = (x_1, \ldots, x_N) \in Q$ den <u>Schwerpunkt</u> $S \in \mathbb{R}^3$ einführt. Man setzt

$$S(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + \ldots + m_N x_N),$$

wo

$$M = m_1 + \ldots + m_N$$

die <u>Gesamtmasse</u> des Systems ist. Der Impulserhaltungssatz impliziert nun – und ist sogar äquivalent –, daß sich der Schwerpunkt des Systems so bewegt, als ob auf ihn gar keine Kräfte wirkten, nämlich (nach dem 1. Newtonschen Gesetz, wenn man möchte) gleichförmig geradlinig,

$$\ddot{S}(t) = 0,$$

für alle $t \in I(x, \dot{x})$, wenn $(x, \dot{x}) \in \Omega$ die Anfangsphase ist. Ist $\dot{S}$ die „Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes", d.h.

$$\dot{S} = \frac{1}{M}(m_1 \dot{x}_1 + \ldots + m_N \dot{x}_N),$$

so bedeutet dies also:

$$S(t) = S + t\dot{S}, \qquad (6)$$

für alle $t \in I(x,\dot{x})$ (Schwerpunktsatz). Tatsächlich es ist

$$\ddot{S}(t) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{x}_j = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}P(t) = 0,$$

wo P der Gesamtimpuls ist.

Man kann nun diese Tatsache nützen, die Dimension des Phasenraums auf Grund der Impulserhaltung nicht nur um 3 zu erniedrigen, sondern sogar um 6 Dimensionen. Zunächst ist ja der Impuls $P:\Omega\to\mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. (Man spricht deshalb auch manchmal vom linearen Impuls. Im Gegensatz dazu ist der Drehimpuls $L:\Omega\to\mathbb{R}^3$ quadratisch.) Jedes Niveau $P^{-1}(\beta)\subseteq\Omega$ $(\beta\in\mathbb{R}^3)$ ist eine $(6N-3)$-dimensionales Gebiet in $\mathbb{R}^{6N-3}$. Man kann nun aber eine Transformation in Raum und Zeit vornehmen, die die Form des N-Körperproblems nicht verändert. (Bisher haben wir – bis auf Zeitreskalierungen – nur Diffeomorphismen im Raum vorgenommen und das Transformationsverhalten untersucht.) Man betrachte nämlich für festes $a,\dot{a}\in\mathbb{R}^3$ den Diffeomorphismus

$$\Phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{6N}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{6N},\ (s,y,\dot{y})\mapsto(t,x,\dot{x})$$

mit

$$t=s,\quad x_j = y_j + a + t\dot{a},\quad \dot{x}_j = \dot{y}_j + \dot{a}. \tag{7}$$

Ist dann $t\mapsto(x(t),\dot{x}(t))\in\Omega$ eine Lösung von (4), so gilt für

$$\begin{aligned}(t, y(t), \dot y(t)) &:= \Phi^{-1}(t, x(t), \dot x(t)) \\ &= (t,\ x(t) - a - t\dot a,\ \dot x(t) - \dot a),\end{aligned}$$

dass für alle $1 \le j,k \le N$

$$\begin{aligned}x_j(t) - x_k(t) &= (y_j(t) + \dot a t + a) - (y_k(t) + t\dot a + a) \\ &= y_j(t) - y_k(t)\end{aligned}$$

und für alle $j = 1,\dots,N$:

$$\ddot x_j(t) = \frac{d}{dt}(\dot x_j(t)) = \frac{d}{dt}(\dot y_j(t) + \dot a) = \ddot y_j(t).$$

Daher ist dann $t \mapsto y(t)$ Lösung des Systems

$$\begin{aligned}m_j \ddot y_j = m_j \ddot x_j &= -m_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} m_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} \\ &= -m_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{y_j - y_k}{|y_j - y_k|^3}.\end{aligned}$$

Die Transformation (7) ~~ist eine so genannte Galiläi-Transformation. Sie~~ ändert die Differentialgleichung also nicht.

Ist nun $(x, \dot x) \in \Omega$ eine Anfangs~~lage~~phase der N Himmelskörper und $(s, \dot s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ die zugehörige Anfangsphase des Schwerpunkts, so kann man mit Hilfe der Galiläi-Transformation (7), wo $(a, \dot a) = (s, \dot s)$ gewählt wird, also erreichen, dass der Schwerpunkt $(c, \dot c)$ in den transformierten Koordinaten $(y, \dot y)$ im Ursprung ruht, also sich nicht bewegt,

$$c(t) = \frac{1}{M}\sum_j m_j y_j(t) = \frac{1}{M}\sum_j m_j (x_j(t) - s - \dot{s}t) = s(t) - s - t\dot{s} = 0$$

$$\cancel{(c(t), \dot{c}(t)) = (s(t) - \dot{s}t - s,\ \dot{s}(t) - \dot{s}) = (0,0)},$$

wegen (6). Das reduziert nun in der Tat die Dimension des Phasenraums um 6, denn wir dürfen nun den Durchschnitt $\tilde{\Omega}$ von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ mit dem linearen Unterraum

$$W = \{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^{6N} : \sum_{j}^{N} m_j x_j = 0,\ \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{x}_j = 0\} \cong \mathbb{R}^{6N-6},$$

$\tilde{\Omega} = \Omega \cap W$, als unseren neuen Phasenraum betrachten. Dann haben wir freilich die Impulserhaltung „verbraucht" und auf diesem Phasenraum nur noch die vier 1. Integrale $(E,L): \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^4$. Eine typische Niveaufläche hat also die Dimension $6N-10$.

Manchmal fasst man auch die Abbildung $I: \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^3$ auf dem „*erweiterten Phasenraum*" $\mathbb{R}\times\Omega$,

$$I(t,x,\dot{x}) = S(x) - t\,\dot{S}(\dot{x})$$

als drei weitere 1. Integrale für das N-Körperproblem auf, so dass man insgesamt auf 10 kommt. In diesem Sinne sind dann mit der beschriebenen Reduktion auf $\tilde{\Omega}$ (bzw. $\mathbb{R}\times\tilde{\Omega}$) die Integrale P und I voll ausgenützt.

Für $N=2$ reicht das nun in der Tat, das System vollständig zu integrieren (für $N \geq 3$ nicht mehr). Da wir nun für unsere zwei Körper mit Massen $m_1, m_2 > 0$ annehmen können, dass zu jeder Zeit

$$m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) = 0 \tag{8}$$

ist, ist es nun naheliegend, eine relative Koordinate

$$x := x_2 - x_1 \tag{9}$$

einzuführen. Hat man dann $t \mapsto x(t)$ für eine Anfangssituation $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ bestimmt, so kann man aus dem linearen Gleichungssystem (8), (9) natürlich unmittelbar $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bestimmen,

$$x_1(t) = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\, x(t), \quad x_2(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, x(t). \tag{10}$$

Nun gilt aber für $t \mapsto x(t)$ folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= -m_1 \frac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^3} - \left(-m_2 \frac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|^3}\right) \\ &= -m_1 \frac{x}{|x|^3} - m_2 \frac{x}{|x|^3} = -M \frac{x}{|x|^3}, \end{aligned}$$

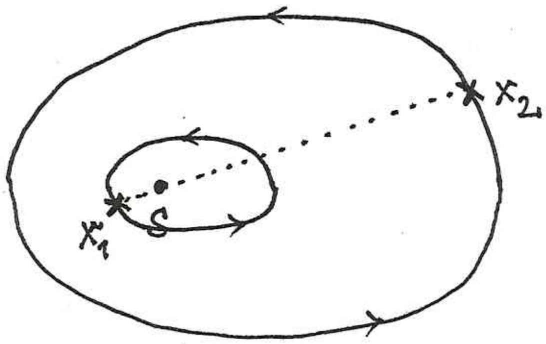
wobei $M = m_1 + m_2$ sei. Macht man nun eine erneute Zeitreskalierung, so dürfen wir annehmen, dass $M = 1$ ist und $t \mapsto x(t)$ damit Lösung der Keplergleichung

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3},$$

welche wir bereits ausgiebig studiert haben (§3). Setzt man nun noch $\mu := m_2$, so dass $m_1 = 1-\mu$ wird, so bekommt man als Lösung des 2-Körperproblems die Bahnen

$$x_1(t) = -\mu x(t), \quad x_2(t) = (1-\mu)x(t), \tag{11}$$

also für $L_S \neq 0$ Ellipsenbahnen (im Fall $-\frac{1}{2|L_S|^2} < E < 0$), Parabelbahnen (bei $E=0$) und Hyperbelbahnen (für $E>0$), die einen Brennpunkt im ~~gemeinsamen~~ Schwerpunkt S haben. Wenn $0<\mu<1$ sehr klein ist (d.h. wenn m_2 sehr viel kleiner als m_1 ist), so beachte man, dass (11) zeigt, wie x_1 so gut wie ruht, während x_2 die Keplerschen Bahnen ganz leicht reskaliert beschreibt.



Das 2-Körperproblem ist damit vollständig verstanden.

Man sieht daraus zum Beispiel, für welche Anfangslagen $(x, \dot{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{12}$ die Lösungskurve für alle Zeiten existiert, $I(x,\dot{x}) = \mathbb{R}$. Gehen wir nämlich zunächst davon aus, dass

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ist, wir also sozusagen schon auf <u>Schwerpunktskoordinaten</u> transformiert haben, so zeigt uns die Lösung des Keplerproblems aus §3, dass für

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt: $I(x,\dot{x}) = \mathbb{R}$, genau wenn $x \times \dot{x} \neq 0$ ist. (Ist der Drehimpuls $x \times \dot{x} = 0$, so ist $t_-(x) < \infty$ oder $t_+(x) < \infty$ oder beides und es ist dann

$$\lim_{t \to t_-} \varphi^t(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \quad \lim_{t \to t_+} \varphi^t(x) = 0 \,.) \qquad (13)$$

Aus der Lösung (11) für das 2-Körperproblem unter der Voraussetzung (12) schließen wir mit (9) dann, dass $I(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \neq \mathbb{R}$ ist, genau wenn

$$0 = x \times \dot{x} = (x_2 - x_1) \times (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2} \, x_1 \times \dot{x}_1$$

ist, wobei wir $x_2, \dot{x}_2$ mittels (12) durch $x_1, \dot{x}_1$ ausgedrückt haben. Andererseits ist der Gesamtdrehimpuls L gegeben durch

$$L = m_1 (x_1 \times \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \times \dot{x}_2) = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) \, x_1 \times \dot{x}_1 ,$$

so dass man nun wegen

$$x \times \dot{x} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} L$$

schließt, dass der Gesamtdrehimpuls verschwinden muss.

Will man diese Bedingung nun auch noch für das ursprüngliche Koordinatensystem formulieren, wo sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig bewegt, so führt man zweckmäßiger

Weise auf

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^{12} : x_1 \neq x_2 \}$$

den Drehimpuls $L_S : \Omega \to \mathbb{R}^3$ bzgl. des Schwerpunktes S ein,

$$L_S(x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j - S) \times \dot{x}_j .$$

Aus dem Impuls- und Drehimpuls-Erhaltungssatz sieht man dann unmittelbar ein, dass auch L_S eine Bewegungsinvariante ist,

$$L_S = L - S \times P .$$

Transformiert man nun die Schwerpunktskoordinaten $(y, \dot{y})$ in die ursprünglichen Koordinaten $(x, \dot{x})$ zurück,

$$x_j = y_j + t\dot{S} + S , \quad \dot{x}_j = \dot{y}_j + \dot{S} ,$$

so erhält man, dass sich der Drehimpuls $\tilde{L} := \sum_j m_j y_j \times \dot{y}_j$ in den Schwerpunktskoordinaten sich so transformiert:

$$L = \sum_j m_j x_j \times \dot{x}_j = \sum_j m_j (y_j \times \dot{y}_j + y_j \times \dot{S}$$

$$+ (t\dot{S} + S) \times \dot{y}_j + S \times \dot{S}) = \tilde{L} + (\sum m_j y_j) \times \dot{S}$$

$$+ (t\dot{S} + S) \times (\sum m_j \dot{y}_j) + M S \times \dot{S}$$

$$= \tilde{L} + S \times P.$$

Der Drehimpuls $\tilde{L}(y)$ transformiert sich also zum Drehimpuls $L_S(x)$,

$$L_S \circ \Phi = \tilde{L}$$

(wo $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \times \Omega$ den Koordinatenwechsel beschreibt), so dass wir erhalten:

(7.2) Satz. Für das 2-Körperproblem auf $\Omega = \{(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^{12} : x_1 \neq x_2\}$ ist $I(x, \dot{x}) \neq \mathbb{R}$, wenn sein Drehimpuls L_S bzgl. des Schwerpunktes verschwindet, $L_S = 0$.

$\boxtimes$

Man weiß sogar, was dann für $t \to t_+(x, \dot{x})$ passiert, wenn – sagen wir – $t_+(x, \dot{x}) < \infty$ ist, nämlich

$$\lim_{t \to t_+} x_1(t) = S(t_+) = \lim_{t \to t_+} x_2(t)$$

aus (13), wo

$$S(t_+) := S + t_+ \dot{S}$$

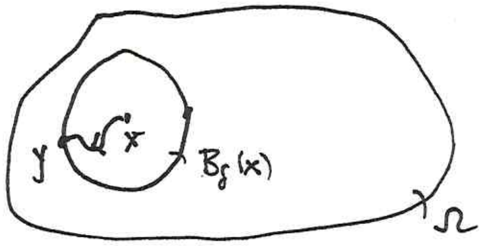
bezeichnet. Es kommt zum <u>Zusammenstoß</u>!

Wir wollen nun versuchen, etwas über die Lebensdauer auch im N-Körperproblem für $N \geq 3$ zu erfahren und, wenn z.B. $t_+(x, \dot{x}) < \infty$ ist, über die Konsequenz zu ermitteln. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma über die Lebensdauer von Bahnen, das allgemein für dynamische Systeme auf Gebieten $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ gültig ist.

(7.3) Lemma. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld und $\varphi = (\varphi^t)$ das zugehörige dynamische System auf Ω. Sei $x \in \Omega$ und $\delta > 0$ derart, dass $\overline{B_\delta(x)} \subseteq \Omega$ ist. Ist nun $c > 0$ so, dass $|f(y)| \leq c$ ist, für alle $y \in \overline{B_\delta(x)}$, so gilt:

$$t_+(x) > \frac{\delta}{c}.$$

Beweis. Sei $[0, t_+) \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(x)$ die Flusskurve von x. Wir dürfen annehmen, dass $t_+ < \infty$ ist, weil sonst die Aussage des Lemmas sicher richtig ist. Dann muss aber die Kurve das Kompaktum $K = \overline{B_\delta(x)}$ verlassen. Es gibt also ein $0 < \tau < t_+$, so dass für $y = \varphi^\tau(x)$ gilt:



$$|y - x| = \delta \quad \text{und} \quad \varphi^t(x) \in \overline{B_\delta(x)} \text{ für } 0 \leq t \leq \tau.$$

Aber dann gilt:

$$\delta = |\varphi^\tau(x) - x| = \left| \int_0^\tau \frac{d\varphi^t}{dt}(x)\, dt \right|$$
$$\leq \int_0^\tau |f(\varphi^t(x))|\, dt \leq \cancel{M} C\tau,$$

also

$$t_+ > \tau \geq \frac{\delta}{C}.$$

$\boxtimes$

Kehren wir nun zu unserem N-Körperproblem

$$m_j \ddot{x}_j = -D_{x_j} V \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

mit

$$V(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

zurück. Für jedes $z = (x, \dot{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ setzen wir $\rho_z : I(z) \to \mathbb{R}_+$,

$$\rho_z(t) := \min\{ |x_i(t) - x_j(t)| : 1 \leq i < j \leq N \}.$$

Dann gilt:

(7.4) Satz (Painlevé). Ist $t_+ := t_+(z) < \infty$, so ist für $\rho(t) := \rho_z(t)$:

$$\lim_{t \to t_+} \rho(t) = 0.$$

In diesem doch recht schwachen Sinn kommt es also dann zu einem Zusammenstoß. Das bedeutet aber noch keineswegs, dass es nun ein ~~Pärchen~~ $\{i,j\} \in \{1,\dots,N\}$ geben muss, so dass wie im 2-Körperproblem

↦ Paar

$$\lim_{t \to t_+} x_i(t) = p = \lim_{t\to t_+} x_j(t)$$

für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3$. Es bedeutet lediglich, dass sich ein Paar (i,j) für eine gewisse Zeit annähert, sagen wir $|x_i(t) - x_j(t)| < \varepsilon$ für ein Zeitintervall $t \in (t_1, t_2)$ (und einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$), dass sich dann aber wieder durchaus trennen kann — jedenfalls schließt der ~~fol~~ Satz dies nicht aus — wenn sich ein anderes Paar (i', j') findet, was für ein Folgeintervall die Nähe übernimmt. Da es aber nur endlich viele Paare gibt, gibt es also mindestens einmal eine Folge $(t_k) \longrightarrow t_+$ und ein festes Paar (i,j), so dass

$$\lim_{k\to\infty} |x_i(t_k) - x_j(t_k)| = 0$$

ist. Allerdings ist es nun immer noch nicht ausgeschlossen, dass $t \mapsto x_i(t)$ und $t \mapsto x_j(t)$ nicht unbeschränkt wird, so dass der Zusammenstoß von i-tem mit j-tem Körper dann sozusagen im Unendlichen stattfindet. Na ja, aber immerhin: es muss sich ein Paar finden, was beliebig nah aneinander heran kommt.

Beweis (von (7.4)). Nehmen wir an, es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so dass es eine Folge (t_k) gibt mit $(t_k) \longrightarrow t_+$ und

$$|x_j(t_k) - x_i(t_k)| \geq \varepsilon, \qquad (14)$$

für alle $1 \leq i < j \leq N$. Wir müssen dann zeigen, dass $t_+ = \infty$ sein muss.

1. Betrachten wir dazu für jedes $k \in \mathbb{N}$ den abgeschlossenen Ball $B_k \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ vom Radius $r = \varepsilon/4$ um $z_k := (x(t_k), \dot{x}(t_k)) \in \Omega$,

$$B_k = \overline{B_{\varepsilon/4}(z_k)}.$$

Dann gilt für alle $z = (x, \dot{x}) \in B_k$ und $1 \leq i < j \leq N$:

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| &= |x_i - x_i(t_k) + x_i(t_k) - x_j(t_k) + x_j(t_k) - x_j| \\ &= |(x_j(t_k) - x_i(t_k)) - ((x_j(t_k) - x_j) - (x_i(t_k) - x_i))| \\ &\geq |x_j(t_k) - x_i(t_k)| - |(x_j(t_k) - x_j) - (x_i(t_k) - x_i)| \\ &\geq \varepsilon - \Delta_{ij}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_{ji} := |(x_j(t_k) - x_j) - (x_i(t_k) - x_i)| &\leq |z_k - z| + |z_k - z| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ist. Damit ist also für $z \in B_k$ und $1 \leq i < j \leq N$

$$|x_i - x_j| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (15)$$

insbesondere also $B_k \subseteq \Omega$.

2. Nun beginnen wir, unser Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^{6N}$ abzuschätzen, welches das N-Körperproblem beschreibt,

$$f(x,\dot{x}) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, -D_{x_1}V, \dots, -D_{x_N}V).$$

Weil die Energie

$$E = \frac{1}{2} \sum_j m_j |\dot{x}_j|^2 + V(x)$$

eine Bewegungsinvariante ist, gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ zunächst, dass

$$|\dot{x}_i(t_k)|^2 \leq \frac{1}{m_i} \sum_j m_j |\dot{x}_j|^2 = \frac{1}{m_i}(2E_0 - V(x(t_k))),$$

wobei E_0 die Energie der Anfangskonfiguration $(x,\dot{x}) \in \Omega$ ist. Wegen (14) ist weiterhin

$$-V(x(t_k)) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_i(t_k) - x_j(t_k)|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i<j} m_i m_j$$

~~mit~~

$$\cancel{c_2 := \sum_{i<j} m_i m_j}$$

und daher ist für jedes $1 \leq i \leq N$

$$|\dot{x}_i(t_k)|^2 \leq c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}$$

mit

$$c_1 := \frac{2E_0}{\min_{j=1}^{N}(m_j)}, \quad c_2 = \frac{\sum_{i<j} m_i m_j}{\min_{j=1}^{N}(m_j)}.$$

Benützen wir nun noch die triviale Abschätzung

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

für $a, b \geq 0$ (aus $(a-b)^2 \geq 0$), so erhalten wir für alle $z = (x, \dot{x}) \in B_k$ die Abschätzung

$$|\dot{x}|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\dot{x}_j|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \left(|\dot{x}_i - \dot{x}_i(t_k)| + |\dot{x}_i(t_k)|\right)^2$$

$$\leq 2 \sum_i \left(|\dot{x}_i - \dot{x}_i(t_k)|^2 + |\dot{x}_i(t_k)|^2\right)$$

$$\leq 2 \sum_i \left(|z - z_k|^2 + c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}\right)$$

$$\leq 2N\left(\frac{\varepsilon^2}{16} + c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}\right),$$

unabhängig von $k \in \mathbb{N}$.

3. Für die anderen Komponenten des Vektorfeldes f benützen wir nun (25), um für alle $z \in B_k$ einzusehen ($1 \leq i \leq N$):

$$|D_{x_i} V(x)|^2 = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3}\right| \leq c_3 \frac{4}{\varepsilon^2}$$

mit

$$c_3 = \sum_{i<j} m_i m_j,$$

um nun für alle $z = (x, \dot{x}) \in B_k$ zu schließen, dass

$$|f(z)|^2 = |\dot{x}|^2 + \sum_i |D_{x_i} V(x)|^2 \leq C$$

ist, wo $C > 0$ nur von N, den Massen m_j $(j = 1, \ldots, N)$

und ε abhängt, nicht aber von k. Nach Lemma (7.3) ist daher

$$t_+ > t_k + \frac{4C}{\varepsilon}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da aber $(t_k) \to t_+$, bedeutet dies, dass $t_+ = \infty$ sein muss.

$\boxtimes$

Wir haben bereits erwähnt, dass schon das 3-Körperproblem im wesentlichen ungelöst ist in dem Sinne, dass man weit davon entfernt ist, für jede Anfangslage $(x,\dot{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{18}$ zu bestimmen, wie sich die Lösungskurve $\varphi : I(x,\dot{x}) \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(x,\dot{x})$ verhält. Ja man weiß nicht einmal, für welche $(x,\dot{x}) \in \Omega$ das Intervall $I(x,\dot{x})$ die ganzen reellen Zahlen ausmacht. Wir wollen deshalb im Folgenden versuchen, wenigstens einige (wenige) Lösungskurven zu finden. Für ein dynamisches System $\varphi = (\varphi^t)$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sucht man da i.a. natürlich zunächst nach Gleichgewichtslagen. Es verwundert uns sicher nicht, dass das N-Körperproblem

$$m_j \ddot{x}_j = -D_{x_j} V \qquad (j = 1, \dots, N) \qquad (16)$$

keine Gleichgewichtslagen besitzt. Das kann man z.B. mit folgendem Lemma einsehen. Um es etwas allgemeiner formulieren zu können — denn es ist auch selbst von einigem Interesse — wollen wir Folgendes definieren: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein

Gebiet, so dass für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\lambda > 0$ auch $\lambda x \in \Omega$ ist, so sagen wir, dass eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $V: \Omega \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $\lambda > 0$ gilt:

$$V(\lambda x) = \lambda^{\alpha} V(x). \tag{17}$$

Es gilt nun:

(7.5) Lemma (Euler). Eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $V: \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann homogen vom Grad α, wenn sie folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$\sum_{j=1}^{n} x^j D_j V - \alpha V = 0. \tag{18}$$

Beweis. Ist V homogen, so differenzieren wir (17) nach λ und werten das Ergebnis bei $\lambda = 1$ aus:

$$\begin{aligned}\alpha V(x) &= \alpha \lambda^{\alpha-1} V(x)\Big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} \lambda^{\alpha} V(x) \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big|_1 V(\lambda x) = \sum_{j=1}^{n} D_j V(\lambda x)\, x^j \Big|_{\lambda=1} \\ &= \sum_j x^j D_j V(x).\end{aligned}$$

Gilt umgekehrt (18), so ist für festes $x \in \Omega$ die $\mathcal{C}^1$-Funktion $h_x: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$h_x(\lambda) = \lambda^{-\alpha} V(\lambda x)$$

konstant, denn

$$h_x'(\lambda) = -\alpha \lambda^{-\alpha-1} V(\lambda x) + \lambda^{-\alpha} \sum_j D_j V(\lambda x) x^j$$
$$= \lambda^{-\alpha-1}\Big(-\alpha V(\lambda x) + \sum_j \lambda x^j \cdot D_j V(\lambda x)\Big) = 0.$$

Also ist für alle $x \in \Omega$ und $\lambda > 0$

$$\lambda^{-\alpha} V(\lambda x) = h_x(\lambda) = h_x(1) = V(x),$$

somit V homogen vom Grad α.

$\boxtimes$

Damit können wir nun beweisen:

(7.6) Proposition. Das N-Körperproblem ($N \geq 2$) besitzt keine Gleichgewichtslagen.

Beweis. Für das N-Körperproblem (16) gilt für eine Gleichgewichtslage $(x, \dot{x}) \in \Omega$ offenbar, dass $\dot{x} = 0$ und x ein kritischer Punkt von $V: Q \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

ist. Nun ist mit jedem $x \in Q$,

$$Q = \{(x_j) \in (\mathbb{R}^3)^N : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\},$$

$\Omega = Q \times \mathbb{R}^{3N}$, auch $\lambda x \in Q$, für alle $\lambda > 0$. V ist offenbar homogen vom Grad $\alpha = -1$,

$$V(\lambda x) = \lambda^{-1} V(x)$$

für alle $x \in Q$ und $\lambda > 0$. Ein kritischer Punkt $x \in Q$ von V muss nach der Eulerschen Gleichung (18) daher eine Nullstelle von V sein,

$$V(x) = -\sum_{j=1}^{N} \langle x_j, D_{x_j}(x) \rangle = 0 .$$

Es ist aber $V(x) < 0$ für alle $x \in Q$, d.h.: V hat keine kritischen Punkte.

☒

Um nun überhaupt 'mal eine Lösungskurve des N-Körperproblems (auch für $N \geq 3$) zu bekommen, fragen wir uns nach den einfachsten Lösungen des 2-Körperproblems, um evtl. höher dimensionale Analoga zu finden. Interessieren wir uns für den Fall, dass $I(x, \dot{x}) = \mathbb{R}$ ist, so ist das im ebenen Fall sicher die Lösung, wo sich beide Körper (mit gleicher Frequenz) auf einer Kreisbahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Wir machen daher den Versuch, auch für $N \geq 3$ nach Lösungen zu suchen, die derart sind, dass alle Körper sich in der gleichen Ebene, in der gleichen Umlaufrichtung und mit der gleichen Frequenz $\omega > 0$ um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen, den wir – wie gesehen – als im Ursprung ruhend annehmen dürfen.

Als Vorbereitung machen wir zunächst die Beobachtung, dass sich die Differentialgleichung des N-Körperproblems auch nicht ändert, wenn wir eine (spezielle) orthogonale Transformation des Raumes vornehmen, also eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (orth. mit $\det A = 1$) mit

$$|Av - Aw| = |v - w|,$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$. Betrachtet man nämlich nun den Diffeomorphismus $\Phi : \Omega \to \Omega$, $(y, \dot{y}) \mapsto (x, \dot{x})$,

$$x_j = A y_j, \quad \dot{x}_j = A \dot{y}_j \quad (j = 1, \dots, N),$$

so erhält man, dass für eine Lösung $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ des N-Körperproblems folgendes gilt, wenn

$$(y(t), \dot{y}(t)) = \Phi^{-1}(x(t), \dot{x}(t))$$

ist:

$$m_j \ddot{y}_j = m_j \frac{d}{dt}(\dot{y}_j) \overset{m_j/\frac{d}{dt}}{=} (A^{-1}\dot{x}_j) = A^{-1}(m_j \ddot{x}_j)$$

$$= -A^{-1}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|x_j - x_k|^3}(x_j - x_k)\right)$$

$$= -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|A^{-1}x_j - A^{-1}x_k|^3}(A^{-1}x_j - A^{-1}x_k)$$

$$= -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} m_j m_k \frac{y_j - y_k}{|y_j - y_k|^3}.$$

Es ist damit bewiesen, dass die Form der Differentialgleichung des N-Körperproblems unter allen Transformationen $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6N}$, $(t, y, \dot{y}) \mapsto (s, x, \dot{x})$,

$$\left.\begin{aligned} s &= t+\tau \\ x_j &= Ay_j + a + t\dot{a} \\ \dot{x}_j &= A\dot{y}_j + \dot{a} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

mit $\tau \in \mathbb{R}$, $a, \dot{a} \in \mathbb{R}^3$ und $A \in SO(3)$ invariant bleibt, denn auch eine Zeitverschiebung $t \mapsto t+\tau$ ändert die Differentialgleichung (16) nicht, da ihre rechte Seite nicht von t abhängt.

Man nennt die Transformationen ~~der Raumzeit~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $(t,w) \mapsto (s,v)$ mit

$$s = t+\tau, \quad v = Aw + a + t\dot{a}$$

mit $\tau \in \mathbb{R}$, $a, \dot{a} \in \mathbb{R}^3$ und $A \in SO(3)$ die Galiläi-Transformationen der Raumzeit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Sie bilden eine 10-dimensionale Untergruppe der Gruppe aller affin-linearen Transformationen des $\mathbb{R}^4$ und enthalten insbesondere alle Bewegungen des Raumes $\mathbb{R}^3$, also die Transformationen $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $(t,w) \mapsto (s,v)$,

$$s = t, \quad v = Aw + a$$

mit $A \in SO(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$. (Die Dimension der Galiläigruppe ist dabei nicht zufällig gleich der Anzahl der 1. Integrale des N-Körperproblems. Man vergleiche dazu die Diskussion in § 3 über die Rotationsinvarianz des Keplerproblems mit der Existenz des 1. Integrals des Drehimpulses.)

Mit dieser Invarianz von (16) unter Galilei-Transformationen, insbesondere Bewegungen des Raumes, stellen wir nun unmittelbar fest:

(7.7) Bemerkung. (a) Ist $g \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, $g = v + \ell$ mit $v \in \mathbb{R}^3$ und $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ einem 1-dimensionalen Unterraum, und $(x, \dot{x}) \in \Omega$ eine Anfangslage des N-Körperproblems, so dass für alle $j = 1, \dots, N$ gilt: $x_j \in g$ und $\dot{x}_j \in \ell$, so gilt für die Lösung $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ des N-Körperproblems für alle $t \in I(x, \dot{x})$:

$$x(t) \in g.$$

(b) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $E = v + W$ mit $v \in \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^3$ einem 2-dimensionalen Unterraum, und ist $(x, \dot{x}) \in \Omega$ eine Anfangslage, so dass für alle $j = 1, \dots, N$ gilt: $x_j \in E$ und $\dot{x}_j \in W$, so gilt für die Lösung $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ des N-Körperproblems für alle $t \in I(x, \dot{x})$:

$$x(t) \in E.$$

Beweis. (a) Man wende zunächst eine Bewegung des Raumes an, so dass in den neuen Koordinaten

$$g = \ell = \{ v \in \mathbb{R}^3 : v^2 = v^3 = 0 \}$$

ist. Ist nun $(x, \dot{x}) \in \Omega$ eine Anfangskonfiguration mit $x_j \in g$, $\dot{x}_j \in \ell$ für $j = 1, \dots, N$, so ist also

$$x_j = (r_j, 0, 0), \quad \dot{x}_j = (\dot{r}_j, 0, 0)$$

mit $r_j, \dot{r}_j \in \mathbb{R}$. Für die Anfangslage $(r, \dot{r}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, genauer $(r, \dot{r}) \in \Omega^{(1)}$ mit

$$\Omega^{(1)} = \{(r,\dot r) \in \mathbb{R}^{2N} : r_i \neq r_j \text{ für } i \neq j\}$$

löse man nun das Problem

$$m_j \ddot r_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} m_j m_k \frac{r_j - r_k}{|r_j - r_k|^3}, \qquad (20)$$

$t \mapsto (r(t), \dot r(t))$. Es folgt nun unmittelbar aus dem Eindeutigkeitssatz für die Lösungen gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass $I(x,\dot x) = I(r,\dot r)$ ist und $t \mapsto (x(t), \dot x(t))$ mit

$$x(t) = (r(t), 0, 0), \quad \dot x(t) = (\dot r(t), 0, 0)$$

die Lösung des N-Körperproblems zum Anfang $(x, \dot x)$ ist, also

$$x(t) \in g,$$

für alle $t \in I(x,\dot x)$.

(6) Hier kann man nach einer Bewegung des Raumes annehmen, dass

$$E = W = \{v \in \mathbb{R}^3 : v^3 = 0\}$$

ist und damit

$$x_j = (z_j, 0), \quad \dot x_j = (\dot z_j, 0)$$

für $z_j = (x_j^1, x_j^2)$, $\dot z_j = (\dot x_j^1, \dot x_j^2) \in \mathbb{R}^2$. Man löse dann das Problem

$$m_j \ddot{z}_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} m_j m_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3} \tag{21}$$

auf

$$\Omega^{(2)} = \{ (z, \dot{z}) \in \mathbb{R}^{4N} : z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j \}$$

ist. Der Beweis verläuft nun analog wie in (a). $\boxtimes$

ich denke doch (Übungsaufgabe!)

Lassen wir nun den Fall (a) zunächst unberücksichtigt, denn die Gefahr eines Zusammenstoßes ist dort wohl eher größer als in (b), obwohl nicht klar ist, ob notwendig $I(r, \dot{r}) \neq \mathbb{R}$ für (20) und alle $(r, \dot{r}) \in \Omega^{(1)}$ gelten muss. Der ebene Fall verspricht da schon mehr.

Dort ist es nun günstig, komplexe Koordinaten $z_j = x_j^1 + i x_j^2 \in \mathbb{C}$ einzuführen. Wir benutzen also ab nun den Buchstaben Ω für das Gebiet

$$\{ (z_1, \dots, z_N, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_N) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N : z_i \neq z_j \ (i \neq j) \}$$

und auf Ω das dynamische System $\varphi = (\varphi^t)$, welches durch (21) gegeben ist. Als kleine Rechenhilfe und auch zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Wirtinger-Ableitungen

$$D_{z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} - i \frac{\partial}{\partial x_j^2} \right),$$

$$D_{\bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} + i \frac{\partial}{\partial x_j^2} \right) \tag{22}$$

ein. Es ist dann

$$m_j \ddot{z}_j = m_j \ddot{x}_j^1 + i m_j \ddot{x}_j^2 = -D_{x_j^1} V(x) - i D_{x_j^2} V(x)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} + i \frac{\partial}{\partial x_j^2} \right) V(x) = -2 D_{\bar{z}_j} V(z),$$

wenn wir die potentielle Energie V als Funktion auf

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C}^N : z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j \}$$

auffassen,

$$V(z) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|}.$$

Wir nennen deshalb

$$m_j \ddot{z}_j = -2 D_{\bar{z}_j} V(z), \quad (j = 1, \dots, N) \qquad (23)$$

das *ebene N-Körperproblem* auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$.

Da wir bereits wissen, dass es für (23) keine Gleichgewichtslagen gibt, fragen wir uns, was denn die einfachsten Lösungen sein könnten. Dazu erinnern wir uns aus der Lösung des 2-Körperproblems daran, dass dort sicher die Lösung die einfachste ist, wo beide Körper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt und gegenüberliegend mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ rotieren,

$$x_1(t) = -\frac{m_2}{M} x(t), \quad x_2(t) = \frac{m_1}{M} x(t),$$

mit $M = m_1 + m_2$,

$$x(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$$

und

$$\omega^2 r^3 = M$$

(vgl. (14) in §3). Setzt man $z^1 := -\frac{m_2}{M} r$, $\dot z^1 := -i\omega\frac{m_2}{M} r$, $z^2 := \frac{m_1}{M} r$, $\dot z^2 = i\omega \frac{m_2}{M} r$, so wird die Lösung zum Anfang $(z,\dot z)\in\Omega$ in komplexer Schreibweise zu

$$z^1(t) = z^1 e^{i\omega t}, \quad z^2(t) = z^2 e^{i\omega t},$$

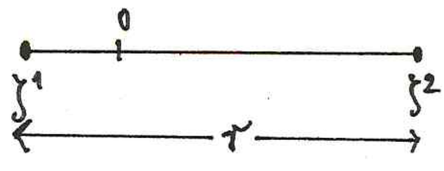
wobei für den Abstand $r = |z^2 - z^1|$ die Keplersche Bedingung

$$\omega^2 r^3 = M$$

gilt. Würden wir uns nun in den Schwerpunkt $S = 0 \in \mathbb{C}$ setzen und die Bewegung beobachten, wenn wir selbst mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ rotierten, so würde sich in diesem rotierenden System diese Lösung als eine Gleichgewichtslage $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in Q \subseteq \mathbb{C}^2$ herausstellen,

$$\zeta^1 = -\mu r, \quad \zeta^2 = (1-\mu) r,$$

mit $\mu = -m_2/M$.



Wir wollen nun versuchen, solche Lösungen auch im Fall $N \geq 3$ für das ebene Problem zu finden. Das heißt, wir müssen zu gegebenen $m_1, \dots, m_N > 0$ und $\omega > 0$ Anfangslagen $z^1, \dots, z^N \in \mathbb{C}$ finden, so dass für $\dot{z}^j := i\omega z^j$ die Lösung von (23) zum Anfang $(z, \dot{z}) \in \Omega$ so lautet:

$$z^j(t) = z^j e^{i\omega t} \qquad (j = 1, \dots, N).$$

Führt man nun rotierende Koordinaten $\zeta \in \mathbb{C}^N$ durch

$$z^j = \zeta^j e^{i\omega t} \quad (j = 1, \dots, N) \tag{24}$$

ein, so müsste sich dann $(\zeta, \dot{\zeta}) := (z, 0)$ als eine Gleichgewichtslage des transformierten Systems herausstellen und umgekehrt. Betrachten wir also die (zeitabhängige) Koordinatentransformation $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \times \Omega$, $(t, \zeta, \dot{\zeta}) \mapsto (s, z, \dot{z})$,

$$\begin{aligned} s &= t \\ z^j &= \zeta^j e^{i\omega t} \\ \dot{z}^j &= (\dot{\zeta}^j + i\omega \zeta^j) e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{25}$$

$j = 1, \dots, N$. Wir wollen nun berechnen, wie sich das dynamische System zu (23) unter Φ transformiert. Dazu benutzen wir einige Rechenregeln über die Wirtinger-Ableitungen, die auch später noch von Nutzen sein werden (vgl. Übungsaufgaben auf Blatt 11).

Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein beliebiges Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Dann gilt für jedes

$j = 1, \dots, n$ zunächst einmal, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z^j}\right)} \tag{26}$$

ist, was man unmittelbar aus der Definition (22) bekommt. Ist weiterhin $D \subseteq \mathbb{C}^m$ ein Gebiet und $\Phi : D \to \Omega$, $\zeta \mapsto z$ eine C^1 Abbildung, so gilt die Kettenregel im Wirtinger-Kalkül

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^j}(f \circ \Phi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k} \circ \Phi \, \frac{\partial \Phi^k}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \circ \Phi \, \frac{\partial \bar{\Phi}^k}{\partial \zeta^j}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^j}(f \circ \Phi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k} \circ \Phi \, \frac{\partial \Phi^k}{\partial \bar{\zeta}^j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \circ \Phi \, \frac{\partial \bar{\Phi}^k}{\partial \bar{\zeta}^j}, \tag{27}$$

was man ebenfalls aus der Definition und der üblichen Formulierung der Kettenregel ableitet, wenn man die Rücktransformation der Wirtinger-Ableitungen auf die üblichen partiellen Ableitungen benutzt ($z^j = x^j + i y^j$, $j = 1, \dots, N$):

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^j} = i\left(\frac{\partial}{\partial z^j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right).$$

Schließlich stellen wir fest, dass für eine C^1 Kurve $\alpha : I \to \Omega$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ebenfalls die Kettenregel in folgender Form gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^j} \circ \alpha \cdot \dot{\alpha}^j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \circ \alpha \cdot \dot{\bar{\alpha}}^j. \tag{28}$$

Nun kehren wir zu unserem ebenen N-Körperproblem zurück und beobachten zunächst, dass sich die potentielle Energie $V : Q \to \mathbb{R}$

$$V(z,\bar z) = -\sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|}$$

unter der Transformation $\Phi_t : Q \to Q$, wo

$$\Phi(t,\zeta,\dot\zeta) =: (t, \Phi_t(\zeta), \Psi_t(\zeta,\dot\zeta))$$

sei, für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht ändert, denn

$$|z^j - z^k| = |\Phi_t^j(\zeta) - \Phi_t^k(\zeta)| = |e^{i\omega t}\zeta^j - e^{i\omega t}\zeta^k|$$

$$= |e^{i\omega t}|\,|\zeta^j - \zeta^k| = |\zeta^j - \zeta^k|,$$

für $1 \le j < k \le N$.

Wir schreiben hier übrigens $V(z,\bar z)$ an Stelle von $V(z)$ um anzudeuten, dass V nicht holomorph in z, sondern, würde man sie in eine Potenzreihe um einen Punkt entwickeln (V ist natürlich reell-analytisch), eine Potenzreihe in z und $\bar z$ würde. Die Wirtinger-Ableitungen an V darf man dann so ausführen, als wären z und $\bar z$ unabhängige Variablen! Z.B. ist für die Hermitesche Form $z \mapsto \langle z,z\rangle$ ~~offenbar~~

$$\frac{\partial}{\partial z^j}\langle z,z\rangle = \frac{\partial}{\partial z^j}\sum_{k=1}^{n} z^k\cdot\bar z^k = \bar z^j$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j}\langle z,z\rangle = z^j,$$

wie man sofort nachrechnet.

Mit der Kettenregel (27) gilt nun

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^j}(V\circ\Phi_t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial z^k}\circ\Phi_t\cdot\frac{\partial z^k}{\partial\bar{\zeta}^j} + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}^k}\circ\Phi_t\frac{\partial \bar{z}^k}{\partial\bar{\zeta}^j}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial \bar{z}^j}\circ\Phi_t\, e^{-i\omega t},$$

denn die Transformation $\Phi_t : Q \to Q,\ \zeta \mapsto z$,

$$z^j = \zeta^j e^{i\omega t} \qquad (j = 1,\dots,N)$$

ist offenbar sogar holomorph, d.h.

$$\frac{\partial z^k}{\partial \bar{\zeta}^j} = 0,$$

für alle $1\le j,k\le N$ und es ist wegen $\bar{z}^j = \bar{\zeta}^j e^{-i\omega t}$ auch

$$\frac{\partial \bar{z}^k}{\partial\bar{\zeta}^j} = \delta^k_j\, e^{-i\omega t}.$$

Wir ~~er~~halten also wegen $V\circ\Phi_t = V$ fest, dass für alle $j = 1,\dots,N$ gilt:

$$D_{\bar{z}^j}V(z) = e^{i\omega t}D_{\bar{\zeta}^j}V(\zeta). \qquad (29)$$

Für die linke Seite von (23) gehen wir nun davon aus, dass $t\mapsto z(t)$ Lösung von (23) ist und schließen, dass gilt:

$$m_j\ddot{z}^j = m_j\frac{d^2}{dt^2}(e^{i\omega t}\zeta^j) = m_j\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}(i\omega\zeta^j + \dot{\zeta}^j)\right)$$

$$= e^{i\omega t}m_j\left(i\omega(i\omega\zeta^j+\dot{\zeta}^j) + i\omega\dot{\zeta}^j + \ddot{\zeta}^j\right)$$

$$= e^{i\omega t}\left(m_j\ddot{\zeta}^j + 2im_j\omega\dot{\zeta}^j - m_j\omega^2\zeta^j\right).$$

Zusammen mit (29) bedeutet dies, dass die Differentialgleichung (23) für das ebene N-Körperproblem in rotierenden Koordinaten nun so lautet:

$$m_j \ddot{z}^j + 2 i m_j \omega \dot{z}^j - m_j \omega^2 z^j = -2 D_{\bar{z}^j} V, \qquad (30)$$

wobei wir nun die Variable ζ^j der Gewohnheit wegen wieder z^j nennen. Man nennt den Term

$$F^j_{Cor}(\dot{z}) = -2 i m_j \omega \dot{z}^j$$

die Corioliskraft auf den j-ten Körper und

$$F^j_{Zen}(z) = m_j \omega^2 z^j$$

die Zentrifugalkraft auf den j-ten Körper und interpretiert (30) nun so, als ob auf den j-ten Körper neben der Gravitationskraft

$$F^j_{Grav}(z) = -2 D_{\bar{z}^j} V(z)$$

auch noch die Coriolis- und Zentrifugalkraft wirken würde,

$$m_j \ddot{z}^j = F^j_{Grav} + F^j_{Cor} + F^j_{Zen},$$

$j = 1, \dots, N$. Es ist, physikalisch gesprochen, für einen Beobachter ununterscheidbar, ob nun eine Kraft wie die Corioliskraft oder Zentrifugalkraft „wirklich" angreift, oder ob diese Kräfte nur daher rühren, dass man sich selbst in einem „Nicht-Inertialsystem" befindet, so dass diese Kräfte nur zu „Scheinkräften" werden. Diese Beobachtung wird übrigens als das so genannte <u>Relativitätsprinzip</u> bezeichnet. Sie bildet den Ausgangspunkt für Einsteins Relativitätstheorie, in der das Gravitationsgesetz und die Bewegungsgleichung in einer rein geometrischen Form und damit koordinatenunabhängig formuliert wird. Wir können uns also durchaus von der Herleitung der Gleichung (30) gewissermaßen distanzieren und (30) selbst als ein eigenes, selbständiges System betrachten.

Kommen wir nun zu den Gleichgewichtslagen von (30). Ist $(z, \dot{z}) \in \Omega$ eine solche, so ist klar, dass $\dot{z} = 0$ sein muss, wenn man wie üblich (30) als ein System 1. Ordnung auf Ω schreibt und damit natürlich $F^j_{Cor}(\dot{z}) = 0$ ist. In einer Gleichgewichtslage $(z, 0)$ halten sich also Gravitationskraft und Zentrifugalkraft die Waage,

$$F^j_{Grav}(z) + F^j_{Zen}(z) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, N),$$

d.h., $z \in Q = \{z : z^i \neq z^j \ (i \neq j)\}$ mit

$$m_j \omega^2 z^j = 2 D_{\bar{z}^j} V(z) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Wir setzen deshalb:

(7.8) <u>Definition</u>. Ein Punkt $z \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$ heißt eine <u>Zentralkonfiguration</u> für das ebene N-Körperproblem mit Massen $m_1, \ldots, m_N > 0$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$, wenn für alle $j = 1, \ldots, N$ gilt:

$$m_j \omega^2 z^j = 2 D_{\bar{z}^j} V(z) \qquad (31)$$

Es ist nun nach dem Beschriebenen klar:

(7.9) Bemerkung. Ein Punkt $z \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$ ist genau dann eine Zentralkonfiguration zu $\omega > 0$, wenn mit $\dot{z} = i\omega z$ gilt: Die Lösung $t \mapsto z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, des ebenen N-Körperproblems (23) lautet

$$z(t) = z e^{i\omega t},$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Es ist auch klar, dass eine Zentralkonfiguration $z \in Q$ notwendig ihren Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j z^j$$

im Ursprung haben muss, denn wäre das nicht der Fall, so müsste ja der Schwerpunkt im ursprünglichen System auch rotieren, $S(t) = S \cdot e^{i\omega t}$, was er aber nach dem Schwerpunktsatz nicht tut, also $S = 0$. Natürlich folgt das auch unmittelbar aus der Definition (31), denn

$$\omega^2 M S = \sum_{j=1}^{N} m_j \omega^2 z^j = 2 \sum_j D_{\bar{z}^j} V(z) = -\sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|^3} (z^j - z^k)$$
$$= 0,$$

weil wiederum für $j \neq k$ die Summanden zu den Paaren (j,k) und (k,j) sich wegheben.

Um nun – möglichst für jede Massenverteilung $m = (m_1, \dots, m_N)$ und jede Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ –

eine Zentralkonfiguration $z \in Q$ zu finden, führen wir noch eine Funktion $W : Q \to \mathbb{R}$ ein, die gewissermaßen die *potentielle Energie* des Systems ist, weil ihr negativer Gradient gerade die Kraft ist, die Arbeit an dem System im Sinne von §3 verrichtet, nämlich

$$-\operatorname{grad}(W)(z) = F_{Grav}(z) + F_{Zen}(z).$$

Man beachte dabei, dass die Corioliskraft wegen der Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$, also einer Drehung um $90°$, stets senkrecht zur Bewegungsrichtung zeigt, $F^j_{Cor}(\dot z) \perp \dot z_j$ und damit wegen der Definition der Arbeit (siehe (1a) in §3) keine Arbeit an dem System verrichtet. Wir setzen also für unser System (30) auf Ω:

(7.10) *Definition*. Für das N-Körperproblem (30) in mit Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ rotierenden Koordinaten nennen wir $W : Q \to \mathbb{R}$,

$$W(z) = V(z) - \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{j=1}^{N} m_j |z_j|^2$$

die *potentielle Energie* und $G : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$G(z, \dot z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\dot z_j|^2 + W(z)$$

die (Gesamt-) *Energie* des Systems. ~~Der Ker-~~

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sum_{j=1}^{N} m_j |z_j|^2$$

heißt die Rotationsenergie. Es gilt nun:

(7.11) Proposition. Die Energie G ist ein 1. Integral für (30).

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt} G(z,\dot z) = \frac{1}{2} \sum_j m_j \frac{d}{dt}\left(\dot z^j \overline{\dot z^j} - z^j \overline{z^j}\cdot \omega^2\right) + \frac{d}{dt} V(z(t))$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\ddot z^j \overline{\dot z^j} + \dot z^j \overline{\ddot z^j} - \omega^2 \left(\dot z^j \overline{z^j} + z^j \overline{\dot z^j}\right)\right) + 2 D_{z^j} V \cdot \dot z^j + 2 D_{\overline{z^j}} V \cdot \overline{\dot z^j},$$

wobei wir nur (28) benutzt haben. Benutzt man noch, dass

$$\mathrm{Re}\left(i \cdot 2 m_j \omega \,|\dot z^j|^2\right) = 0$$

ist, so findet man tatsächlich, dass

$$2\frac{d}{dt} G(z,\dot z) = \mathrm{Re}\Big\{ \sum_j m_j \left(\overline{\dot z^j}\, \ddot z^j - \omega^2\, \overline{\dot z^j}\, z^j\right) + 2 i \omega\, \overline{\dot z^j}\, \dot z^j$$

$$+ 2 \overline{\dot z^j}\, D_{\overline{z^j}} V \Big\}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Re}\left[\overline{\dot z^j}\left(m_j \ddot z^j + 2 i m_j \omega \dot z^j - m_j \omega^2 z^j - 2 D_{\overline{z^j}} V\right)\right]$$

$$= 0,$$

wegen (30) ist.

$\boxtimes$

Unsere nächste Beobachtung ist nun die, dass die Zentralkonfigurationen $z \in Q \subset \mathbb{C}^N$ genau die kritischen Stellen von W sind. Dazu reichte es, die Ableitungen $\partial W/\partial \bar{z}^j$ in z zu berechnen, denn, weil W reell ist, folgt mit (21), dass

$$\frac{\partial W}{\partial z^j} = \overline{\frac{\partial W}{\partial \bar{z}^j}}$$

ist. Es ist aber

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}^j}(z) = D_{\bar{z}^j} V - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\left(\frac{1}{2}\omega^2 \sum_k m_k z^k \bar{z}^k\right)$$

$$= D_{\bar{z}^j} V(z) - \frac{1}{2}\omega^2 m_j z^j,$$

für alle $j = 1, \dots, N$. Also ist $z \in Q$ genau dann eine Zentralkonfiguration, wenn $\operatorname{grad} W(z) = 0$ ist. Damit können wir nun beweisen.

(7.12) Satz. Für jedes $N \in \mathbb{N}$, für jede Massenverteilung $(m_1, \dots, m_N)$ und für jedes $\omega > 0$ existieren Zentralkonfigurationen.

Beweis. Wir zeigen, dass die positive Funktion $\mathcal{U} := -W : Q \to \mathbb{R}_+$ ein absolutes Minimum hat. Das machen wir so, dass wir zeigen, dass $\mathcal{U}$ eigentlich ist, d.h. das Urbild eines jeden Intervalls $[0, a] \subseteq \mathbb{R}$, $a > 0$, kompakt ist. Wählt man dann $a > \inf(W)$, so hat $\mathcal{U}|K : K \to \mathbb{R}_+$,

$$K = \mathcal{U}^{-1}([0,a]),$$

ein absolutes Minimum $z \in K$, welches dann auch ein absolutes Minimum für $\mathcal{U}$ auf ganz Q sein muss, weil $\mathcal{U}$ auf $Q \setminus K$ größer als a ist.

Dass min U tatsächlich eigentlich ist, sieht man daran, dass W nach $+\infty$ geht, wenn sich z dem Rand von Q nähert oder betragsmäßig nach ∞ geht: Ist $(z_\nu) \subseteq Q$ eine Folge mit

$$\min\{|z_\nu^j - z_\nu^k| : 1 \le j < k \le N\} \longrightarrow 0,$$

für $\nu \to \infty$, so folgt wegen $(-V(z_\nu)) \to \infty$ auch $(U(z_\nu)) \to \infty$. Ist $(z_\nu) \subseteq Q$ mit $(|z_\nu|^2) \to \infty$, so ist wegen

$$\left(\tfrac{1}{2}\omega^2 \sum m_j |z^j|^2\right) \longrightarrow \infty$$

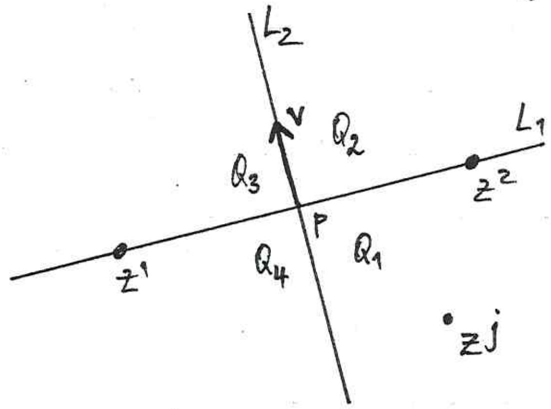
ebenso $(U(z_\nu)) \to \infty$. Deshalb ist K abgeschlossen in der kompakten Menge

$$K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^N : |z| \le \varepsilon^{-1} \text{ und } \min_{1 \le j < k \le N} |z^j - z^k| \ge \varepsilon\}$$

für $\varepsilon > 0$ klein genug und ist deshalb selber kompakt. ☒

Nun ist Satz (7.12) allerdings ein reines Existenzresultat, das uns noch nicht sagt, wie denn wir, sagen wir im Fall $N=3$, die 3 Massen m_1, m_2, m_3 in $\mathbb{C}$ platzieren müssen, um eine Zentralkonfiguration zu bekommen. (Lediglich, dass der Schwerpunkt des gesuchten Dreiecks im Nullpunkt sein muss.) Um auch diese Frage zu beantworten, ist der folgende Satz nützlich.

(7.13) <u>Satz</u> (C. Conley). Sei $N \ge 3$, $m_1, \dots, m_N > 0$, $\omega > 0$ und $z \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$ eine Zentralkonfiguration. Sei $L_1 \subseteq \mathbb{C}$ die Verbindungsgrade zwischen z^1 und z^2, $L_2 \subseteq \mathbb{C}$ die Mittelsenkrechte auf der Strecke $[z^1, z^2]$ und Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die vier Zusammenhangskomponenten (Quadranten) von $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$. Dann gilt: Liegen die Punkte $z^j \in \mathbb{C}$, $j = 3, \dots, N$, allesamt in gegenüberliegenden abgeschlossenen Quadranten, so müssen sie alle auf L_1 oder L_2 liegen.



Beweis. Wir wählen ein $v \neq 0$, so dass $L_2 = p + \mathbb{R}v$ ist, wo $p \in \mathbb{C}$ der Mittelpunkt zwischen z^1 und z^2 sei. Es ist dann also

$$\langle z^2 - z^1, v \rangle = 0$$

(wo $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet, $\langle z, w \rangle = \mathrm{Re}(z\bar{w})$). Daraus folgt für alle $j = 3, \dots, N$:

$$\langle z^2 - z^j, v \rangle = \langle z^1 - z^j, v \rangle$$

und auch

$$\left\langle \frac{2}{m_2} D_{\bar{z}^2} V(z) - \frac{2}{m_1} D_{\bar{z}^1} V(z), v \right\rangle = \omega^2 \langle z^2 - z^1, v \rangle = 0,$$

weil z eine Zentralkonfiguration ist. Deshalb ist nun

$$0 = \langle m_1 \frac{z^2 - z^1}{|z^2-z^1|^3} + \sum_{j=3}^{N} m_j \frac{z^2-z^j}{|z^2-z^j|^3}, v\rangle$$

$$- \langle m_2 \frac{z^1-z^2}{|z^1-z^2|^3} + \sum_{j=3}^{N} m_j \frac{z^1-z^j}{|z^1-z^j|^3}, v\rangle$$

$$= \sum_{j=3}^{N} m_j \left(\frac{1}{|z^2-z^j|^3} - \frac{1}{|z^1-z^j|^3} \right) \langle z^1 - z^j, v\rangle \qquad (32)$$

Nun ist

$$\frac{1}{|z^2-z^j|^3} - \frac{1}{|z^1-z^j|^3} \geq 0,$$

genau wenn $|z^2-z^j| \leq |z^1-z^j|$ ist, also z^j auf ~~auf~~ der Seite von L_2 liegt, in der z^2 liegt. Andererseits ist

$$\langle z^1 - z^j, v\rangle \geq 0,$$

genau wenn z^j auf der Seite von L_1 liegt, in die v nicht zeigt. Liegen alle z^j, $(j = 3, \dots, N)$ in gegenüberliegenden Summanden, so hat also jeder Summand in (32) das gleiche Vorzeichen und muss deshalb Null sein. Das heißt aber gerade, dass $z^j \in L_1 \cup L_2$ liegen muss, für alle $j = 3, \dots, N$.

$\boxed{/}$

Für $N=3$ schränkt das die Möglichkeiten einer

Zentralkonfiguration beträchtlich ein. Zum einen können natürlich alle drei Massen auf einer Geraden liegen, ohne dem Satz zu widersprechen. Eine solche Konfiguration nennen wir <u>kollinear</u>. Ist dies nicht der Fall, so muss nach Satz (7.13) jeder Eckpunkt des Dreiecks $z^1z^2z^3$ auf der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite liegen. Es ist klar, dass dies nur ein gleichseitiges Dreieck zu Stande bringt. Wir erhalten also:

(7.14) <u>Korollar</u>. Für $N=3$ gibt es höchstens eine kollineare Zentralkonfiguration oder eine Zentralkonfiguration, die ein gleichseitiges Dreieck bildet. ☒

Untersuchen wir nun, welche Konfigurationen wirklich als Lösung von

$$\frac{1}{2} m_j \omega^2 z^j = D_{\bar{z}^j} V(z) \quad (j=1,2,3) \tag{33}$$

auftaucht. Im Falle eines gleichseitigen Dreiecks gibt es für das Dreieck $z^1z^2z^3$ nur einen Parameter, nämlich z.B. den Seitenabstand $r>0$, der das Dreieck bis auf Kongruenz festlegt. Bedenkt man, dass der Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{M}(m_1 z^1 + m_2 z^2 + m_3 z^3)$$

im Ursprung liegen muss, so legt eine solche Konfiguration sogar bis auf eine Drehung im Raum fest. Klar ist schließlich, dass

$z \in \mathbb{C}^3$ genau dann eine Zentralkonfiguration ist, wenn $e^{i\alpha} z$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ eine solche ist, denn Gleichung (33) multipliziert sich auf beiden Seiten lediglich mit $e^{i\alpha}$. Aus dem schon betrachteten Fall im Zweikörperproblem ist ebenfalls plausibel, dass es zu $\omega > 0$ höchstens ein $r > 0$ geben kann, so dass die Dreieckskonfiguration zentral ist. Im Falle $N = 2$ war die Beziehung nämlich durch

$$\omega^2 r^3 = M$$

gegeben, wo $r = |z^2 - z^1|$ ist, $M = m_1 + m_2$.

$$z^1 \bullet\!\!\xrightarrow[\quad]{\;r\;}\!\!\bullet z^2$$

Der ~~Der~~ Fall einer kollinearen Konfiguration ist durch zwei Parameter bis auf Rotation eindeutig bestimmt (wenn der Schwerpunkt in 0 ist). Sagen wir, dass z^1 und z^3 die beiden äußeren Positionen sind, so muss

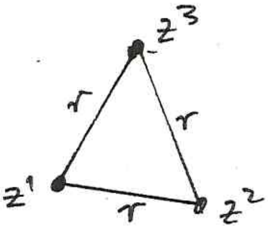
$$z^2 = (1-\rho) z^1 + \rho z^3$$

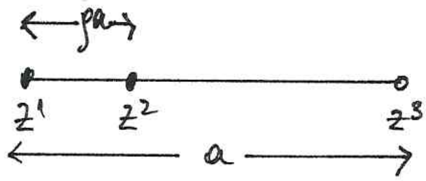
für ein $\rho \in (0,1)$ sein. Setzen wir also noch

$$a := |z^3 - z^1|,$$

so kommen wir zu der Frage, für welche Seitenlänge $r > 0$ die Konfiguration des gleichseitigen

Dreiecks und für welches Paar (ρ, a) mit $0<\rho<1$ und $a>0$ die kollineare Konfiguration zentral ist.





(7.15) Satz. Für $\omega>0$ und $m_1, m_2, m_3>0$ beliebig.

eines gleichseitigen Dreiecks

(a) Die Konfiguration ✓ $z=(z^1,z^2,z^3)$ mit Schwerpunkt in $0\in\mathbb{C}$ ist genau dann eine Zentralkonfiguration, wenn für die Seitenlänge $r>0$ und der Gesamtmasse $M=m_1+m_2+m_3$ gilt:

$$\omega^2 r^3 = M.$$

(b) Das Polynom $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

Kleiner Fehler!

$$f(\rho) = m_2(m_3-m_1)\left[\rho^2(1-\rho)^3\right] + m_2^2\left[(1-\rho)^3-\rho^3\right] + m_2\left[m_1(1-\rho)^2 - m_3\rho^2\right]$$

hat genau eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ und es gilt: Die kollineare Konfiguration $z=(z^1,z^2,z^3)$ mit $z^2=(1-\rho)z^1+\rho z^3$ $(\rho\in(0,1))$ und Schwerpunkt

✓ ist

in $0\in\mathbb{C}$, ✓ ~~hat~~ genau dann eine Zentralkonfiguration, wenn $f(\rho)=0$ ist und für den Abstand $a=|z^3-z^1|$ gilt:

$$\omega^2 a^3 = M\,\frac{m_2+m_3\rho^2}{m_2\rho^3+m_3\rho}.$$

<u>Beweis.</u> (a) Es ist für $j = 1,2,3$:

$$2 D_{\bar{z}^j} V(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} m_j m_k \frac{z^j - z^k}{|z^j - z^k|^3}$$

$$= \frac{1}{r^3} m_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} m_k (z^j - z^k) = \frac{m_j}{r^3} \sum_{k=1}^{3} m_k (z^j - z^k) .$$

Berücksichtigen wir noch, dass

$$\sum_{k=1}^{3} m_k z^k = MS = 0$$

ist, so erhalten wir für die Konfiguration $z \in Q$ eines gleichseitigen Dreiecks mit Schwerpunkt in $0 \in \mathbb{C}$:

$$2 D_{\bar{z}^j} V(z) = \frac{M}{r^3} m_j z^j \quad (j = 1,2,3),$$

was eine Zentralkonfiguration genau dann wird, wenn $M/r^3 = \omega^2$, also

$$\omega^2 r^3 = M$$

ist.

(b) Siehe Siegel / Moser, § 14.

$\boxtimes$

Kommen wir nun zu der Frage, ob die gefundenen Lösungen auch stabil sind. Das einzige uns bisher bekannte hinreichende Kriterium, welches die Stabilität einer Gleichgewichtslage sichert, ist Dirichlets Satz (4.15). Eine dazu benötigte Liapunov-Funktion haben wir dabei auch, nämlich unser 1. Integral

$G: \Omega \to \mathbb{R}$,

$$G(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\dot{z}^j|^2 + W(z).$$

Schauen wir also, ob G irgendwo ein striktes, lokales Minimum hat.

Dazu führen wir zunächst folgende Begriffsbildung ein. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige $\mathcal{C}^2$-Funktion, so können wir für jedes $z \in \Omega$ die Hesse-Form $D^2 f_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ bzgl. der Wirtingerableitungen wie folgt zerlegen:

$$D^2 f_z(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial z^k}(z)\, \xi^j \xi^k + 2 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}(z)\, \xi^j \bar{\xi}^k + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{z}^k}(z)\, \bar{\xi}^j \bar{\xi}^k$$

$$=: \partial^2 f_z(\xi) + 2\partial\bar{\partial} f_z(\xi) + \bar{\partial}^2 f_z(\xi).$$

Man nennt dies die Zerlegung von $D^2 f_z$ in ihre (2,0)-, (1,1)- und (0,2)-Anteile. Hiervon ist besonders der (1,1)-Anteil von Interesse. Er ist nämlich eine Hermitesche Form, d.h. er kommt von einem ~~Hermiteschen Produkt~~ auf $\mathbb{C}^n$ (während der (2,0)-Anteil von einem $\mathbb{C}$-bilinearen und der (0,2)-Anteil von einem $\mathbb{C}$-antilinearen Produkt kommt). Man kann also davon sprechen, ob der (1,1)-Anteil positiv definit ist oder nicht. Man sagt nun:

$\mapsto$ besser sesquilinearen Bilinearform.

(7.16) Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion.

(a) Man nennt dann für $z \in \Omega$ die quadratische Form $\mathrm{Lev}(f)_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Lev}(f)_z(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}(z)\, \xi^j \bar{\xi}^k$$

die <u>Levi-Form</u> von f in z.

(b) Es heißt f <u>streng plurisubharmonisch</u>, wenn die Levi-Form in allen Punkten positiv definit ist,

$$\mathrm{Lev}(f) > 0 \, .$$

Streng plurisubharmonische Funktionen sind damit gewissermaßen ein komplex-analytisches Analogon für streng konvexe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, für die ja bekanntlich $D^2 f > 0$ in jedem Punkt gilt. Ganz ähnlich zu streng konvexen Funktionen gilt nun auch im komplexen Fall:

(7.17) <u>Proposition</u> (Maximumprinzip). Eine streng plurisubharmonische Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ hat keine lokalen Maxima.

<u>Beweis.</u> Sei $z \in \Omega$ doch ein lokales Maximum von f. Dann ist die Hesse-Form $D^2 f_z$ negativ semidefinit, insbesondere ist für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$D^2 f_z(\xi) + D^2 f_z(i\xi) \leq 0 \, .$$

Für den $(2,0)$- und den $(0,2)$-Anteil ist nun

$$\partial^2 f_z(i\xi) = -\partial^2 f_z(\xi), \quad \bar{\partial}^2 f_z(i\xi) = -\bar{\partial}^2 f_z(\xi),$$

während für den (1,1)-Anteil, also die Levi-Form

$$\mathrm{Lev}(f)_z(i\xi) = \mathrm{Lev}(f)_z(\xi)$$

gilt. Also ist für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$

$$0 \geq D^2 f_z(\xi) + D^2 f_z(i\xi) = 4\,\mathrm{Lev}(f)_z(\xi)\,.$$

Dann kann also f nicht streng plurisubharmonisch sein.

$\boxed{/}$

Nun haben wir genügend Vorbereitungen getroffen, um ein ernüchterndes Resultat zu zeigen:

(7.18) Proposition. Die Energie $G : \Omega \to \mathbb{R}$ für das N-Körperproblem in rotierenden Koordinaten hat kein lokales Minimum.

Beweis. Es ist

$$G(z,\dot z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\,|\dot z^j|^2 + W(z).$$

Also muss ein lokales Minimum $(z,\dot z) \in \Omega$ notwendig $\dot z = 0$ erfüllen und z ein lokales Minimum von W sein. Wir zeigen nun, dass $U := -W : \Omega \to \mathbb{R}_+$ streng plurisubharmonisch ist und daher wegen (7.17) kein lokales Maximum hat. Es ist nämlich

$$U(z) = \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|} + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_j m_j\,|z^j|^2,$$

Form

also

$$D_{\bar z^k} u(z) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N} m_k m_l \frac{z^k - z^l}{|z^k - z^l|^3} + \frac{1}{2} \omega^2 m_k z^k .$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\frac{z^k - z^l}{|z^k - z^l|^3}\right) = \frac{-1}{|z^k - z^l|^3} + (z^k - z^l)\left(\frac{-3}{|z^k - z^l|^4}\frac{\partial}{\partial z^l}|z^k - z^l|\right)$$

monisch

und damit wegen

$$\frac{\partial}{\partial z^l}\left[(z^k - z^l)(\bar z^k - \bar z^l)\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\left(|z^k - z^l|^2\right)^{-1/2}\cdot(-1)(\bar z^k - \bar z^l)$$

in, um

schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\frac{z^k - z^l}{|z^k - z^l|^3}\right) = \frac{1}{2|z^k - z^l|^3} .$$

das

n hat

Das zeigt nun:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \bar z^k}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} m_j \omega^2 + \frac{1}{4} \sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} \frac{m_j m_l}{|z^j - z^l|^3}, & \text{für } j= \\ -\frac{1}{4} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|^3} & \text{für } j\neq \end{cases}$$

Daher ist nun für alle $\xi \in \mathbb{C}^N$, $\xi \neq 0$:

not-

lini-

$U := -W$:

d da-

n hat.

$$\mathrm{Lev}(f)_z(\xi) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \bar z^k}(z)\, \xi^j \bar\xi^k$$

$$= \sum_j \left(\frac{1}{2}\omega^2 m_j + \frac{m_j}{4}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} \frac{m_l}{|z^j - z^l|^3}\right)|\xi^j|^2$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{j\neq k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|^3}\, \xi^j \bar\xi^k$$

2

1

$$= \frac{1}{2} M\omega^2 |\xi|^2 + \frac{1}{4} \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|^3} \left(|\xi^j|^2 + |\xi^k|^2 - \xi^j \bar{\xi}^k - \xi^k \bar{\xi}^j \right)$$

$$= \frac{1}{2} M\omega^2 |\xi|^2 + \frac{1}{4} \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z^j - z^k|^3} |\xi^j - \xi^k|^2 > 0.$$

$\square$

Wenn unser einziges hinreichendes Kriterium für Stabilität fehlschlägt, so schauen wir zum Abschluss noch, ob wir nicht wenigstens instabile Lösungen aussortieren können. Hier wissen wir, dass eine Gleichgewichtslage sicher dann instabil ist, wenn einer ihrer charakteristischen Exponenten positiven Realteil hat. Wir zitieren hier für den Fall der gleichseitigen Dreieckslösung (für $\omega = 1$) das folgende Resultat aus C.L. Siegle, J. Moser: Vorlesungen über Himmelsmechanik, § 18:

(7.19) Satz. Für $m_1, m_2, m_3 > 0$ sei

$$\gamma = \frac{27}{4} \, \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}.$$

Dann sind die 12 charakteristischen Exponenten der Zentralkonfiguration eines gleichseitigen Dreiecks mit $\omega = 1$ genau die Nullstellen von

$$f(\alpha) = \alpha^2 (\alpha^2 + 1)^3 (\alpha^4 + \alpha^2 + \gamma).$$

$\square$

Für $\gamma > \frac{1}{4}$ liegen damit zwei charakteristische Exponenten in der rechten Halbebene und damit die Gleichgewichtslage für

$$\frac{M^2}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1} > 27$$

nicht stabil.

Die kollineare Lösung ist übrigens nie stabil, die Dreieckslösung für $M^2 < 27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1)$ ist es wohl.

Ende