

Analysis IV

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Teil 2

Mitschrift der Vorlesung aus dem Sommersemester 2021,
gelesen von Prof. Dr. Frank Loose

von Felicitas Henle

Vorwort

Diese Mitschrift ist kein Skriptersatz! Einige Skizzen sowie Beweise werden unvollständig oder gar nicht wiedergegeben. Außerdem wird keine Garantie auf Fehlerfreiheit gegeben. Sollten Fehler gefunden werden, bitte gerne per Mail an felicitas.henle@uni-tuebingen.de weiterleiten, vielen Dank!

Man möge mir außerdem verzeihen, dass die Kapitel 1 und 2 hier leer sind - siehe dazu die bereits online verfügbaren Skripts zu den Themen *Funktionentheorie* (<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/maphy/lehre/ss-2021/funktionen/dateien/skripte/mfph4-funk.pdf>) und *Differentialrechnung* (<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/maphy/lehre/ss-2021/funktionen/dateien/skripte/mfph3-diff-kopie.pdf>).

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	7
2	Existenz und Eindeutigkeit	9
3	Lineare Systeme	11
4	Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert	23
5	Qualitative Theorie	39

1 Grundlagen

2 Existenz und Eindeutigkeit

3 Lineare Systeme

07.07.2021

Motivation 3.1. In dem im Vorwort erwähnten Skript zur Differentialrechnung wurde bereits die grundlegende Theorie über lineare Systeme behandelt. In diesem Teil geht es nun um die Lösung von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Matrizen-Exponentialfunktion. Ist

$$\dot{z} = Az$$

mit $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ein lineares System auf \mathbb{C}^n mit einer Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

so „entkoppelt“ $\dot{z} = Az$ zu n Gleichungen auf \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\begin{aligned} z_1(t) &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ z_n(t) &= c_n \cdot e^{\lambda_n t}, \end{aligned}$$

wobei man die Koeffizienten c_i aus den Anfangswerten erhält, also

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Das heißt, dass die Spalten von $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ein Lösungsfundamentalsystem von $\dot{z} = Az$ sind mit

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

3 Lineare Systeme

Beachte, dass

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

Deshalb ist $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t \cdot A)^k = \exp(tA) = e^{tA}$.

Frage: Ist $\Phi(t) = \exp(tA)$ auch im allgemeinen Fall eine Lösung von $\dot{\Phi} = A\Phi$ auf $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$?
Bzw. macht der Ausdruck $\sum_k \frac{1}{k!} A^k$ für alle $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ Sinn?

Erinnerung 3.2.

- a) Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und ist $T: V \rightarrow W$ linear, so setzt man die *Operatornorm* $\|T\| \in [0, \infty]$ so fest:

$$\|T\| := \sup \{ \|Tv\|_W : \|v\|_V \leq 1 \}$$

Es heißt T *beschränkt*, falls $\|T\| < \infty$ ist.

- b) Sind V und W endlichdimensional, so ist jede lineare Abbildung $T: V \rightarrow W$ beschränkt.
c) Im Fall $V = \mathbb{C}^n$ betrachten wir die euklidische Norm

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j}$$

und erhalten die induzierte Operatornorm für $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) = \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$

$$\|A\| = \sup \{ \|Az\| \in [0, \infty) : \|z\| \leq 1 \}.$$

- d) Ist $\dim(V) < \infty$, so sind je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V *äquivalent*, d.h. es gibt Konstanten $c, C > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt:

$$c \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1$$

Daraus folgt unter anderem: Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V konvergiert (bzw. ist Cauchy-Folge) bzgl. $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn sie bzgl. $\|\cdot\|_2$ konvergiert (bzw. Cauchy-Folge ist).

- e) Für die Operatornorm $\|\cdot\|: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow [0, \infty)$ gilt (direkt aus der Definition):
(i) $\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$ für alle $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und alle $z \in \mathbb{C}^n$.
(ii) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für alle $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$,
insbesondere $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Vorbereitung 3.3. Um

$$\text{„ } \exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n \text{ “}$$

für ein Element $T \in M$ erklären zu können (mit einer Menge M), braucht man folgende Strukturen auf M :

- (i) M sollte „innere Multiplikation“ $M \times M \rightarrow M, (T, S) \mapsto T \cdot S$ haben, damit „ T^n “ erklärt ist.
- (ii) M sollte „äußere Multiplikation“ $\mathbb{C} \times M \rightarrow M, (\lambda, T) \mapsto \lambda \cdot T$ haben.
- (iii) M sollte Addition $M \times M \rightarrow M, (T, S) \mapsto T + S$ haben.

Das heißt, M sollte eine \mathbb{C} -Algebra sein, um „ $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T^k$ “ erklären zu können. (Die Anforderungen (i) und (iii) machen M zu einem Ring, während die Anforderungen (ii) und (iii) M zu einem Vektorraum machen.)

- (iv) Außerdem sollte M noch eine Norm tragen, damit wir Konvergenz haben, und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T^k$$

erklärt werden kann. (Vielleicht fordern wir sogar, dass M bzgl. $\|\cdot\|$ vollständig ist, dann würde jede Cauchy-Folge konvergieren, und wir hätten eine sogenannte „Banach-Algebra“.)

→ Alles das hat $(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$.

Satz 3.4. Für jede Matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \text{absolut.}$$

Kommentar 3.5. Absolute Konvergenz bedeutet, dass sogar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$$

konvergiert. Wegen der Vollständigkeit von $(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Beweis von Satz 3.4. Wir müssen nur zeigen, dass die Folge $\left(\sum_{k=0}^n \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Wir schreiben dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| < \infty.$$

Aber es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\| \stackrel{\text{Operatornorm}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty.$$

Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ absolut.

□

Definition 3.6. Wir nennen

$$\begin{aligned} \exp: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \\ \exp(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = e^A = \mathbf{1}_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots \end{aligned}$$

die (komplexe) *Matrizenexponentialfunktion*.

Satz 3.7. Sei \exp die *Matrizenexponentialfunktion*. Dann gilt

(a) Ist $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$, so gilt

$$\exp(B) = S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1}.$$

(b) Sind $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, so gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

(c) Es ist $e^0 = \mathbf{1}_n = \text{diag}(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ und für alle $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist $e^A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ und es gilt

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

Anmerkung. In den Übungen werden wir zeigen, dass für die *Matrizenexponentialfunktion* die Potenzgesetze in voller Allgemeinheit nicht gelten. Außerdem zeigt uns Teil (a) von Satz 3.7, dass man ohne Probleme zu Konjugierten übergehen kann. Teil (c) zeigt uns dann, dass e^A für alle $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ invertierbar ist.

Lemma 3.8 (Cauchy-Produkt von Reihen). Seien $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} B_l$ absolut konvergente Reihen in $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und

$$C_n := \sum_{n=k+l} A_k B_l.$$

Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} B_l \right) \quad \text{„Cauchy-Produkt“.}$$

Beweis von Satz 3.7.

(a) Es ist

$$B^k = \underbrace{\left(S \cdot A \cdot S^{-1} \right) \cdot \left(S \cdot A \cdot S^{-1} \right) \cdot \dots \cdot \left(S \cdot A \cdot S^{-1} \right)}_{k\text{-mal}} = S \cdot A^k \cdot S^{-1}$$

und daher gilt dann

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S \cdot A^k \cdot S^{-1} = S \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot S^{-1} = S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1}.$$

(b) Wegen $AB = BA$ gilt mit dem Binomischen Lehrsatz (BLS)

$$\begin{aligned} (A+B)^n &= \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} A^k B^l. \\ \implies \exp(A+B) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n \\ &\stackrel{\text{BLS}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} A^k B^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=l!} A^k B^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{l!} B^l \\ &\stackrel{3.8}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} B^l \right) \\ &= \exp(A) \cdot \exp(B). \end{aligned}$$

(c) Klar ist

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k = \mathbb{1}_n.$$

Wegen $A \cdot (-A) = -A^2 = (-A) \cdot A$ vertauschen die Matrizen A und $-A$. Dann ist

$$\mathbb{1}_n = \exp(0) = \exp(A + (-A)) \stackrel{(b)}{=} \exp(A) \cdot \exp(-A)$$

$$\text{und ebenso} \quad \mathbb{1}_n = \exp(0) = \exp((-A) + A) \stackrel{(b)}{=} \exp(-A) \cdot \exp(A).$$

Also ist $\exp(A)$ invertierbar und es gilt $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$. □

Satz 3.9. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Dann ist $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(t) = \exp(tA)$ stetig differenzierbar (sogar analytisch¹) und es gilt

$$\Phi(0) = \mathbb{1}_n, \quad \dot{\Phi}(t) = A \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot A \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

¹Erinnerung: Analytisch heißt, dass jeder Eintrag um jeden Punkt in einer Potenzreihe in t entwickelbar ist.

3 Lineare Systeme

Kommentar 3.10. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Spalten von Φ , so ist also $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem von $\dot{z} = Az$ auf \mathbb{C}^n und das zugehörige dynamische System (Gesamtheit der Lösungen) $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\varphi^t(z) = e^{tA} \cdot z$$

12.07.2021

Nachtrag. Anschauliche Bedeutung des Cauchy-Produkts (Lemma 3.8):

C_n ist gerade die Summe über jene Summanden, für die $k + l = n$ gilt. Diese liegen alle auf einer Geraden, wenn man in dem Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ an die Stelle (k, l) gerade die Matrix $A_k B_l$ setzt. (siehe Abb. 3.1).

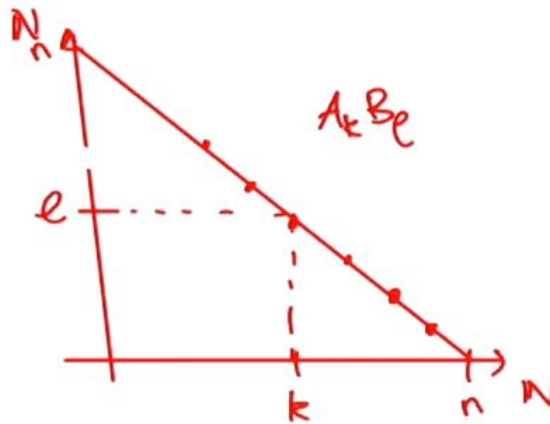


Abbildung 3.1: Anschauliche Bedeutung der Summanden von C_n .

Man summiert zunächst für jedes n die endlich vielen Summanden auf, die in der Diagonalen zwischen $(n, 0)$ und $(0, n)$ stehen, dann bildet man die unendliche Summe über alle Diagonalen. Auf diese Weise fährt man das ganze Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ab.

Beweis von Lemma 3.8. Wir setzen

$$\alpha_n := \sum_{k=0}^n A_k, \quad \beta_n := \sum_{l=0}^n B_l, \quad \gamma_n := \sum_{m=0}^n C_m,$$

und $A := \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ und $B := \sum_{l=0}^{\infty} B_l$. Sei weiter

$$\gamma_n^* := \alpha_n \cdot \beta_n = \sum_{k,l \leq n} A_k B_l$$

Wir zeigen, dass $(\gamma_n^* - \gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Da $(\gamma_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \cdot B$ gilt, folgt, dass (γ_n) konvergent ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n) = AB$ ist. Denn:

$$\gamma_n = \underbrace{(\gamma_n^* - \gamma_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\gamma_n^*}_{\rightarrow AB} \rightarrow 0 + AB = AB.$$

Nun überlegen wir uns, wie wir $(\gamma_n^* - \gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ zeigen können. Dafür überlegen wir uns zunächst, was $(\gamma_n^* - \gamma_n)$ überhaupt ist. Schauen wir uns nochmals die Definition von $\gamma_n^* := \sum_{k,l \leq n} A_k B_l$ an, so sehen wir, dass hier also genau die Beiträge aufsummiert werden, die alle in dem blauen Kasten liegen (vgl. Abb. 3.2), während bei $\gamma_n = \sum_{m=0}^n C_m$ nur Beiträge aufsummiert werden, die unterhalb oder auf der Diagonalen liegen.

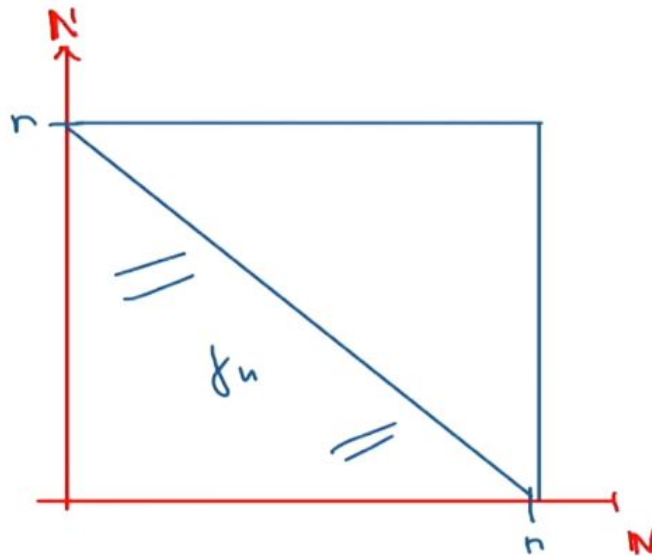


Abbildung 3.2: Anschauliche Bedeutung von γ_n (unteres Dreieck) und γ_n^* (ganzes Rechteck).

Nun wollen wir die Differenz (also in Abb. 3.2 genau das obere Dreieck) mit

$$\Delta_n := \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : k \leq n, l \leq n, k + l > n\}$$

bezeichnen und erhalten dann

$$\gamma_n^* - \gamma_n = \sum_{(k,l) \in \Delta_n} A_k B_l.$$

Hier muss man nun zeigen, dass diese Summe für große n gegen Null geht. Dafür definieren wir uns eine Hilfsgröße.

Sei $P_n := \left(\sum_{k=0}^n \|A_k\| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^n \|B_l\| \right) \in [0, \infty)$. Da $\sum A_k, \sum B_l$ absolut konvergieren, konvergiert auch $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (nämlich gegen $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|B_l\| \right) \in [0, \infty)$). Konvergente Folgen sind insbesondere Cauchy-Folgen.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt, dass

$$|P_n - P_{n_0}| < \varepsilon.$$

3 Lineare Systeme

Es ist aber:

$$P_n - P_{n_0} = \sum_{(k,l) \in \Gamma_{n,n_0}} \|A_k\| \cdot \|B_l\|$$

mit $\Gamma_{n,n_0} = \{(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : k \leq n, l \leq n\} \setminus \{(k,l) : k \leq n_0, l \leq n_0\}$.

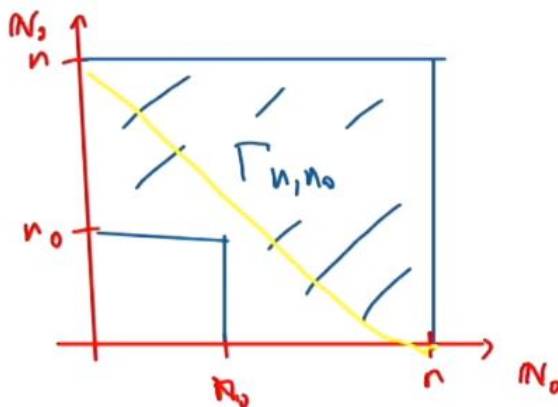


Abbildung 3.3: Anschauliche Bedeutung der Menge Γ_{n,n_0} (genau der blaue Bereich zwischen dem großen Rechteck und dem kleinen Rechteck). Das Dreieck oberhalb der gelben Diagonalen stellt Δ_n dar.

Für $n > 2n_0$ ist nun: $\Gamma_{n,n_0} \supseteq \Delta_n$ (vgl. Abb. 3.3). Daraus erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\|\gamma_n^* - \gamma_n\| = \left\| \sum_{(k,l) \in \Delta_n} A_k B_l \right\| = \sum_{(k,l) \in \Delta_n} \|A_k\| \|B_l\| \leq \sum_{(k,l) \in \Gamma_{n,n_0}} \|A_k\| \|B_l\| = |P_n - P_{n_0}| < \varepsilon \quad \forall n > 2n_0.$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^* - \gamma_n) = 0.$$

Es fehlt noch, zu zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ sogar absolut konvergiert.

Setze dazu

$$a_k := \|A_k\|, \quad b_l := \|B_l\|, \quad c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l \geq 0.$$

Dann konvergieren $\sum a_k$ und $\sum b_l$ absolut in \mathbb{R} nach Voraussetzung. Nach dem obigen Teil wissen wir, dass $\sum c_n$ konvergent ist. Außerdem

$$\|C_n\| \leq \sum_{k+l=n} \|A_k\| \|B_l\| = c_n$$

Mit dem Majorantenkriterium sieht man daraus, dass $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ absolut konvergent ist. \square

Definition. Der *Kommutator* $[A, B]$ zweier Matrizen $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist definiert als

$$[A, B] = AB - BA.$$

A und B kommutieren also genau dann, wenn $[A, B] = 0$.

Beweis von Satz 3.9. Wir wissen bereits, dass $\Phi(0) = 1$. Nun rechnen wir für alle $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\Phi(t+h) - \Phi(t)) &= \frac{1}{h} (\exp((t+h)A) - \exp(tA)) \\ &= \frac{1}{h} (\exp(tA + hA) - \exp(tA)) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{h} (\exp(tA) \cdot \exp(hA) - \exp(tA)) \\ &= \frac{1}{h} (\exp(tA) (\exp(hA) - \mathbf{1}_n)) \\ &= \exp(tA) \cdot \frac{\exp(hA) - \mathbf{1}_n}{h} \end{aligned}$$

wobei bei (\star) verwendet wurde, dass $[tA, hA] = tA \cdot hA - hA \cdot tA = 0$, also dass tA und hA kommutieren. Daher kann man hier das Exponentialgesetz anwenden.

Erinnerung an die Definition der Exponentialfunktion:

$$\exp(hA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} h^n A^n = \mathbf{1}_n + hA + h^2 (\dots)$$

Daher kann man schreiben

$$\frac{1}{h} (\Phi(t+h) - \Phi(t)) = \exp(tA) \cdot \frac{\exp(hA) - \mathbf{1}_n}{h} = \exp(tA) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} h^k A^{k+1}.$$

Nun sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $f(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} h^k A^{k+1}$. f konvergiert für alle $h \neq 0$, aber auch in $h = 0$, und ist daher stetig auf ganz \mathbb{R} (insbesondere in 0), da Potenzreihen gerade stetige Funktionen liefern. Es ist $f(0) = A$. Daher ist

$$\frac{1}{h} (\Phi(t+h) - \Phi(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \exp(tA) \cdot A = \Phi(t) \cdot A.$$

Weil $[A, A^k] = 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$, folgt schließlich, dass

$$\exp(tA) \cdot A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{A^k \cdot t^k \cdot A}_{t^k \cdot A \cdot A^k} = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = A \cdot \exp(tA).$$

Insgesamt gilt also tatsächlich: Φ ist differenzierbar mit

$$\dot{\Phi}(t) = A \cdot \Phi(t)$$

und außerdem ist $\dot{\Phi}$ deshalb auch stetig. □

Frage 3.11. Wie kann man $\exp(A)$ konkret berechnen?

Definition 3.12.

- (a) Man nennt $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ *halbeinfach*, wenn es ein $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt, sodass SMS^{-1} diagonal ist. (Wenn M also im Komplexen diagonalisierbar ist.)
- (b) Es heißt $N \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^k = 0$.

Satz 3.13 (Chevalley-Jordan). *Zu jedem $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ gibt es (genau ein) halbeinfaches $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und nilpotentes $N \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit*

$$[M, N] = 0 \quad \text{und} \quad A = M + N.$$

Beweis. Man findet mit dem Satz über die Jordansche Normalform zunächst ein $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass für $B := S^{-1}AS$ gilt:

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanblöcken

$$J_k = \lambda_k \mathbb{1}_n + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, r).$$

Man setze nun

$$\Delta_k = \lambda_k \cdot \mathbb{1}_n, \quad \Delta := \begin{pmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_r \end{pmatrix}$$

sowie

$$I_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_k \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\Delta \cdot I = I \cdot \Delta$$

da alle obigen Matrizen Blockform haben, kann man blockweise multiplizieren. Weiter ist Δ_k immer nur ein Vielfaches der Einheitsmatrix, und die Einheitsmatrix kommutiert bekannterweise mit allen Matrizen. Daher kommutieren dann jeweils Δ_k und I_k , und wegen der

Blockform dann auch Δ und I .
 Außerdem gilt offensichtlich, dass

$$B = \Delta + I.$$

Setze nun

$$M := S\Delta S^{-1}, \quad N := SIS^{-1}.$$

Dann ist M offenbar halbeinfach (da Δ diagonal war, also ist $S^{-1}(S\Delta S^{-1})S = \Delta$ wieder diagonal, $S^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist also die gesuchte Matrix, um M zu diagonalisieren) und N ist nilpotent, denn ist $I_k \in \text{Mat}_{n_k}(\mathbb{C})$, so ist $I_k^{n_k} = 0$.², und damit auch

$$N^n = (SIS^{-1})^n = S \underbrace{I^n}_{=0} S^{-1} = 0.$$

Außerdem ist

$$M \cdot N = S\Delta S^{-1} \cdot SIS^{-1} = S(\Delta I)S^{-1} = S(I\Delta)S^{-1} = SIS^{-1} \cdot S\Delta S^{-1} = N \cdot M.$$

Schließlich ist

$$M + N = S\Delta S^{-1} + SIS^{-1} \stackrel{\text{Distributivgesetz}}{=} S \underbrace{(\Delta + I)}_{=B} S^{-1} = A.$$

□

Kommentar 3.14.

(a) Wegen Satz 3.13 ist zunächst für die Jordan-Zerlegung $A = M + N$ mit $[M, N] = 0$

$$\exp(tA) = \exp(tM) \cdot \exp(tN)$$

(denn $tA = tM + tN$ ist Jordan-Zerlegung von tA). Und wegen Satz 3.7 braucht man nun nur noch $\exp(t\Delta)$ und $\exp(tI)$ für

$$\Delta = \lambda \mathbb{1}_n, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

²Übung: Beim Multiplizieren von I_k mit sich selbst „wandert“ die Diagonale mit den Einträgen 1 jedes Mal um eins nach oben, bis sie für beim n_k -ten Mal (wenn I_k eine $n_k \times n_k$ -Matrix ist) ganz verschwindet.

3 Lineare Systeme

zu berechnen. Das schaffen wir auch noch:

$$\exp(t\Delta) = e^{\lambda t} \mathbf{1},$$
$$\exp(tI) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Damit haben wir

$$\dot{x} = Ax$$

mit $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ durch

$$\varphi^t(x) = e^{tA} \cdot x$$

explizit gelöst.

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

Motivation 4.1. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld. Für jedes $x_0 \in G$ sei

$$\varphi(x_0): I(x_0) \rightarrow G$$

die maximale Lösungskurve des Anfangswertproblems (AWP's)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

auf G . Hierbei ist $I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0)) \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_-(x_0) \in [-\infty, 0)$, $t_+(x_0) \in (0, \infty]$. Wir setzen

$$\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times G: t \in I(x)\}.$$

und

$$\begin{aligned} \varphi: \Omega &\rightarrow G, (t, x) \mapsto \varphi^t(x), \\ \varphi^t(x) &= \varphi(x)(t) \end{aligned}$$

Wir wissen bisher nur: Für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt:

$$s \in I(\varphi^t(x)) \iff s + t \in I(x)$$

und für diese $s \in I(\varphi^t(x))$ gilt:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Was uns fehlt, um zu sehen, dass φ ein *dynamisches System* ist, ist:

- Ω ist offen
- $\varphi: \Omega \rightarrow G$ ist stetig
- $\varphi: \Omega \rightarrow G$ ist sogar stetig differenzierbar.

Satz 4.2. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld und $x_0 \in G$. Sei weiter $0 < b < t_+(x_0)$ beliebig. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 und $L > 0$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

- $t_+(x) > b$.
- $\|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)\| \leq e^{Lt} \cdot \|x - x_0\| \quad \forall t \in [0, b]$.

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

Kommentar 4.3. Der Satz zeigt dann, dass

$$t_+ : G \rightarrow (0, \infty]$$

halbstetig von unten (bzw. $t_- : G \rightarrow [-\infty, 0)$ halbstetig von oben) ist, d.h.

$$\forall x_0 \in G \forall b < t_+(x_0) \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_0) : t_+(x) > b.$$

Stört man also den Anfangswert x_0 leicht, so kann t_+ höchstens nach oben (und t_- höchstens nach unten) „wegringsen“, siehe dazu auch Abb. 4.1.

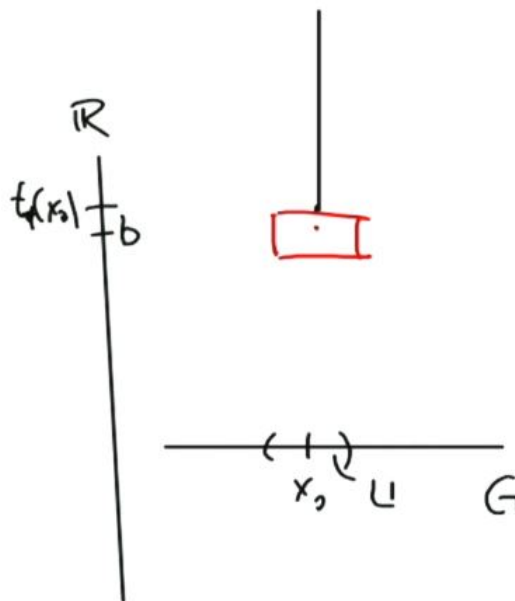


Abbildung 4.1: Anfangswert x_0 mit zugehöriger Intervallgrenze $t_+(x_0)$. Bewegt man sich innerhalb der Umgebung U (entspricht $B_\delta(x_0)$ im Kommentar), so kann sich $t_+(x_0)$ höchstens auf b nach unten verändern (roter Kasten).

14.07.2021

Wiederholung. Wir wollen immer eine Gleichung der Art $\dot{x} = f(x)$ lösen, wobei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld (lokal Lipschitz-stetig reicht). Wir wollen üblicherweise das AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (*)$$

lösen. Dann gibt es eine maximale Lösungskurve von $(*)$ auf dem Intervall $I(x) = (t_-(x), t_+(x))$, und zwar $\varphi(x) : I(x) \rightarrow G$. Die Gesamtheit der maximalen Lösungen existiert auf der Menge

$$\Omega := \bigcup_{x \in G} \{x\} \times I(x)$$

(vgl. Abb. 4.2). Auf Ω kann man nun den zu f gehörigen Fluss φ definieren mit

$$\varphi: \Omega \rightarrow G, \quad (t, x) \mapsto \varphi(t, x) = \varphi^t(x) = \varphi(x)(t).$$

Ziel: Zeige Folgendes:

- Ω ist offen (siehe Abb. 4.2).
- $\varphi: \Omega \rightarrow G$ ist stetig.

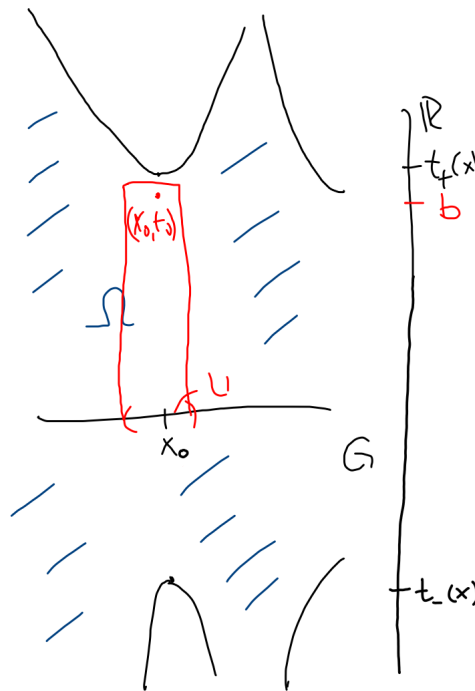


Abbildung 4.2: Menge Ω , sowie Startwert x_0 mit Umgebung U . Zu jedem Startwert gibt es eine solche Umgebung U , sodass die Sterbenszeit von allen Punkten in U noch mindestens b beträgt; der ganze rote Kasten liegt also noch ganz in Ω , daher ist Ω offen.

Satz 4.2 sagt dann Folgendes aus:

Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld und $x_0 \in G$. Sei weiter $0 < b < t_+(x_0)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 und $L > 0$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

- $t_+(x) > b$.
- $\|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)\| \leq e^{Lt} \cdot \|x - x_0\| \quad \forall t \in [0, b]$.

Siehe dazu auch Abb. 4.3. Der zweite Punkt macht dabei eine quantitative Aussage darüber, wie weit sich die Lösungskurve, die bei x startet, von der Lösungskurve, die bei x_0 startet, entfernen kann - abhängig davon, wie weit x vom Anfangswert x_0 entfernt war. $\varphi^t(x)$ hängt also stetig (sogar lokal Lipschitz-stetig, wie die Abschätzung zeigt) vom Anfangswert ab.

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

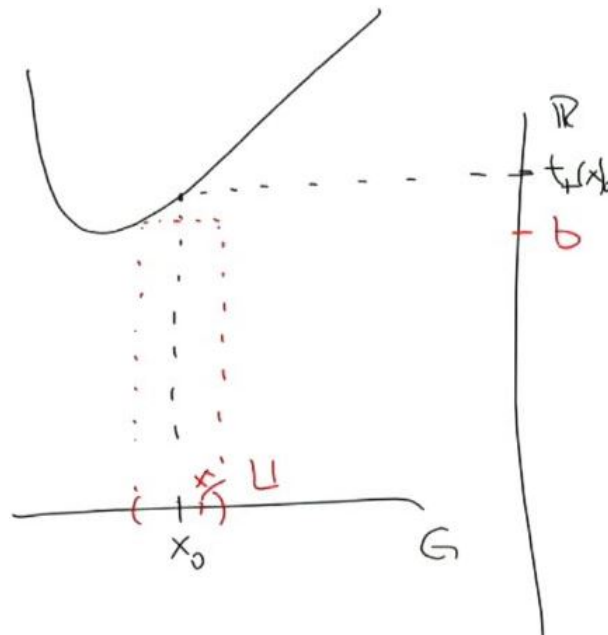


Abbildung 4.3: Graphische Darstellung von Satz 4.2. Selbst wenn $t_+(x)$ sich wie hier zur linken Seite hin verkleinert, wird sie niemals kleiner als b , solange man in der Umgebung U bleibt.

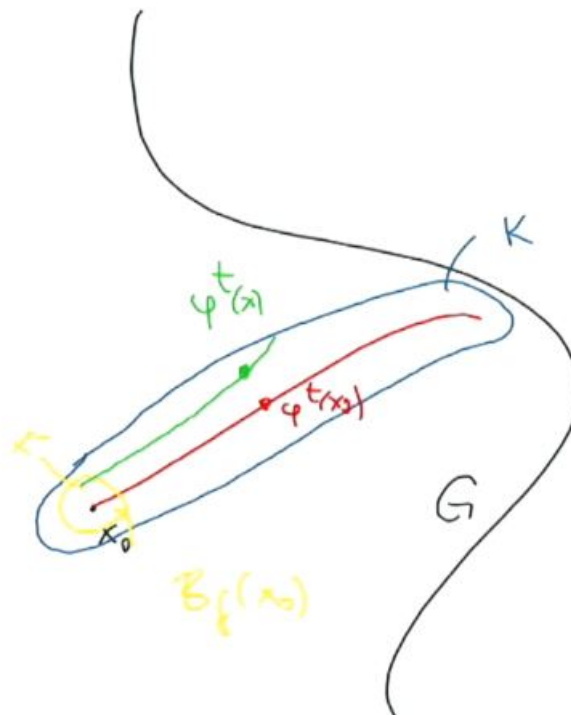


Abbildung 4.4: Zum Beweis von Satz 4.2. Gebiet G mit Anfangswert x_0 und Kompaktum K wie oben definiert. Wir betrachten nun eine kleine Kugel $B_\delta(x_0)$ um x_0 . Uns interessieren dann die (grünen) Bahnen, welche in $B_\delta(x_0)$ starten.

Beweis von Satz 4.2. Es sei

$$B := \left\{ \varphi^t(x_0) \in G : 0 \leq t \leq b \right\}$$

die Bahn bis zur Zeit $t = b$, die in x_0 startet. Da φ in Richtung von t stetig (sogar stetig differenzierbar) ist, und das Intervall $[0, b]$ kompakt ist, ist auch B kompakt (Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen sind kompakt).

Weil B kompakt ist, gibt es ein $r > 0$ mit

$$\overline{B_r(\varphi^t(x_0))} \subseteq G, \quad \forall t \in [0, b]$$

(Die Abstandsfunktion $\text{dist} : G \rightarrow [0, \infty]$, $d(x) = \text{dist}(x, \partial G)$ ist stetig.) Dann ist

$$K := \bigcup_{t \in [0, b]} \overline{B_r(\varphi^t(x_0))} = \{x \in G : \text{dist}(x, B) \leq r\}$$

kompakt (vgl. Abb. 4.4).

Sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für $f|_K$. Sei $\delta > 0$ und $x \in G$ mit $\|x - x_0\| < \delta$.

Behauptung: $t_+(x) > b$.

Angenommen, $t_+(x) \leq b$. Betrachte

$$a := \sup \left\{ c \in [0, t_+(x)) : \varphi^t(x) \in K \quad \forall t \in [0, c] \right\}$$

(Das ist der erste Zeitpunkt, wo die Kurve, die in x startet, das Kompaktum K verlässt.)

Behauptung: $a = t_+(x)$, falls $\delta > 0$ klein genug ist.

Angenommen, $a < t_+(x)$. Betrachte

$$u : [0, a] \rightarrow [0, \infty), \quad u(t) = \left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\|$$

(„ u gibt also den Abstand zweier Punkte an, wobei sich einer der Punkte auf der grünen und der andere Punkt sich auf der roten Linie in Abb. 4.4 befindet.“)

$$\begin{aligned} \implies u(t) &= \left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\varphi^\tau(x) - \varphi^\tau(x_0)) d\tau + (\varphi^0(x) - \varphi^0(x_0)) \right\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\varphi^\tau(x) - \varphi^\tau(x_0)) d\tau \right\| + \underbrace{\left\| \varphi^0(x) - \varphi^0(x_0) \right\|}_{=u(0)} \\ &\leq u(0) + \int_0^t \|f(\varphi^\tau(x)) - f(\varphi^\tau(x_0))\| d\tau \quad (\text{denn } \varphi^t(x) \text{ löst die DGL } \dot{x} = f(x)) \\ &\leq u(0) + \int_0^t L \cdot \underbrace{\|\varphi^\tau(x) - \varphi^\tau(x_0)\|}_{u(\tau)} d\tau \\ &= u(0) + L \int_0^t u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

$$\xrightarrow{\text{Gronwall}} \quad \left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| = u(t) \leq u(0)e^{Lt} = \|x - x_0\| e^{Lt} \quad \forall t \in [0, a].$$

Nun wähle $\delta < re^{-Lb}$. Dann folgt, dass

$$\left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| \leq \delta e^{Lt} < r \quad \forall t \in [0, a].$$

Deshalb bleibt $\varphi^t(x)$ auch für kurze Zeit länger in K , also kann a nicht das Supremum aller dieser Zeiten gewesen sein, also haben wir einen Widerspruch. Und damit ist doch $a = t_+(x)$. (Die grüne Kurve in Abb. 4.4 kann also K nicht so verlassen, wie in der Skizze.)

Das ist nun ein weiterer Widerspruch dazu, dass $t_+(x) \leq b < \infty$ ist, weil $t \mapsto \varphi^t(x)$ bei $t_+(x) < \infty$ jedes Kompaktum verlassen muss.

$$\implies t_+(x) > b.$$

Die Rechnung zeigt dann, dass

$$\left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| \leq \|x - x_0\| e^{Lt} \leq \|x - x_0\| e^{Lb}, \quad \forall t \in [0, b], \forall x \in B_\delta(x_0).$$

□

Kommentar 4.4. Eine analoge Aussage gilt für $t_-(x)$ für x nahe bei x_0 .

Korollar 4.5. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\varphi: \Omega \rightarrow G$ wie oben. Dann ist $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$ offen und φ ist stetig.

Beweis von Korollar 4.5. (a) Zeige zunächst: Ω ist offen (vgl. auch Abb. 4.2).

Sei $(t_0, x_0) \in \Omega$ und sei oBdA $t_0 \geq 0$. Da $I(x_0)$ ein offenes Intervall ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass auch noch $(t_0 + \delta, x_0) \in \Omega$. Dann wissen wir mit Satz 4.2, dass eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 existiert, sodass $(t_0 + \delta, x) \in \Omega$ für alle $x \in U$. Daraus folgt, dass

$$(t_0, x_0) \in (0, t_0 + \delta) \times U \subseteq \Omega$$

Also haben wir für unseren Startpunkt (t_0, x_0) eine offene Menge $(0, t_0 + \delta) \times U$ gefunden, welche den Startpunkt enthält und selbst noch ganz in Ω liegt. Damit ist Ω offen.

(b) Zeige nun, dass φ stetig ist.

Sei wieder $(t_0, x_0) \in \Omega$ beliebig, wobei oBdA $t_0 \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt mit Satz 4.2

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0): \quad t_+(x) > t_0.$$

Da für festes $t \in [0, t_0]$ gilt, dass $\varphi^t(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \varphi^t(x_0)$ konvergiert¹, kann man $\delta > 0$ so klein wählen, dass

- $\left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
- $\left\| \varphi^t(x_0) - \varphi^{t_0}(x_0) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

¹Das folgt aus der Exponentialgleichung $\left\| \varphi^t(x) - \varphi^t(x_0) \right\| \leq \|x - x_0\| e^{Lt} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

falls $x \in B_\delta(x_0)$ und $|t - t_0| < \delta$ ist. Daraus folgt, dass

$$\|\varphi^t(x) - \varphi^{t_0}(x_0)\| \leq \|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)\| + \|\varphi^t(x_0) - \varphi^{t_0}(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $(t, x) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B_\delta(x_0)$.

Also ist φ stetig in (t_0, x_0) . □

Motivation 4.6.

(a) Ist $\varphi: \Omega \rightarrow G$ sogar stetig differenzierbar?

Da $t \mapsto \varphi^t(x)$ stetig differenzierbar ist, reicht es zu zeigen, dass

$$(t, x) \mapsto D_x \varphi^t(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x)$$

existiert und stetig ist. (Dann ist φ total differenzierbar und alle partiellen Ableitungen sind stetig: $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$.)

Kurz: Hängt die Lösung differenzierbar vom Anfangswert ab?

(b) Was wäre ein Kandidat für $D\varphi^t(x)$?

Angenommen, wir wüssten, dass φ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann wäre

$$\frac{d}{dt} D\varphi^t(x) \stackrel{\text{Schwarz}}{=} D_x \frac{d\varphi^t}{dt}(x) = D_x \left(f \left(\varphi^t(x) \right) \right) \stackrel{\text{KR}}{=} \underbrace{Df \left(\varphi^t(x) \right)}_{=: A(t)} \cdot D\varphi^t(x),$$

das heißt, $t \mapsto D\varphi^t(x)$ würde die lineare DGL

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

auf $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ lösen. Beachte:

$$\Phi(0) = D\varphi^0(x) = D(\text{id}) = \text{id} = \mathbb{1}_n.$$

Deshalb sind die Spalten von $D\varphi^t(x)$ dann ein Lösungsfundamentalsystem von $\dot{x} = A(t)x$ auf \mathbb{R}^n .

Definition 4.7.

(a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld und $y: I \rightarrow G$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Eine *Variation von Lösungen* $(x_\varepsilon)_{-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ (bei $\varepsilon_0 > 0$) um y ist eine \mathcal{C}^2 -Abbildung

$$x: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \rightarrow G,$$

so dass gilt:

- $x_\varepsilon: I \rightarrow G$, $x_\varepsilon(t) := x(\varepsilon, t)$ ist eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$, für jedes $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$;
- $x_0 = y$.

(b) Ist $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ eine Variation von Lösungen um $y = x_0: I \rightarrow G$ von $\dot{x} = f(x)$, so

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

nennt man

$$\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \xi(t) := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t)$$

das zugehörige Variations-Vektorfeld von (x_ε) .

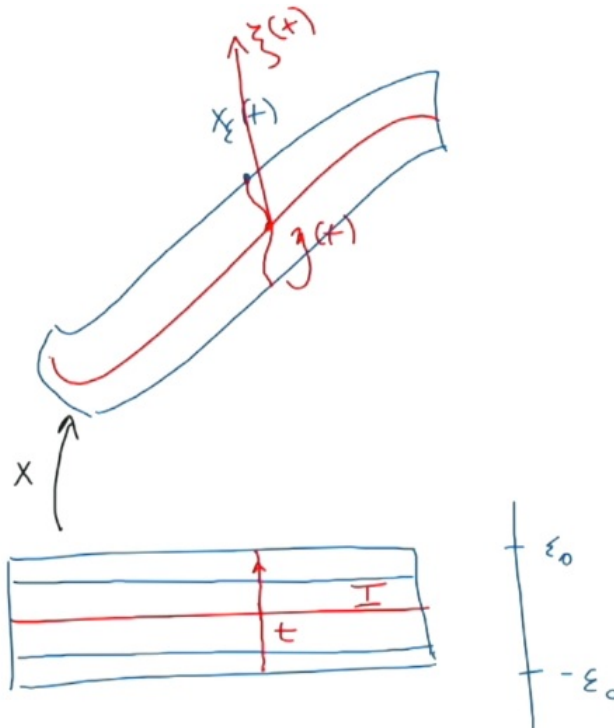


Abbildung 4.5: Zu Definition 4.7. Eine Lösung y ist in eine Familie von Lösungen eingebettet. Variiert man ε im Bereich $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, so erhält man benachbarte Lösungen $x_\varepsilon(t)$. Lässt man nun zu festem t das ε laufen (im unteren Schaubild), so erhält man im oberen Schaubild ebenfalls eine Kurve (rot). Differenziert man nun diese Kurve nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$, so erhält man $\xi(t)$.

Kommentar 4.8. Entwickelt man $(\varepsilon, t) \mapsto x_\varepsilon(t)$ nach ε in einem Punkt $x_0(t) = y(t)$ der Lösungskurve $t \rightarrow y(t)$, so ist also

$$x_\varepsilon(t) = y(t) + \varepsilon \cdot \xi(t) + o(\varepsilon)$$

und man betrachtet daher

$$u_\varepsilon(t) = y(t) + \varepsilon \cdot \xi(t)$$

als „Lösung 1. Ordnung“ von $\dot{x} = f(x)$.

Proposition 4.9. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $y: I \rightarrow G$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$ und (x_ε) eine Variation von y mit Variationsvektorfeld $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,

$$A(t) := Df(y(t))$$

so löst ξ die (i.A. nicht-autonome) lineare Differentialgleichung

$$\dot{\xi} = A(t)\xi$$

auf \mathbb{R}^n .

Beweis von Proposition 4.9. Es ist $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (weil (x_ε) eine \mathcal{C}^2 -Abbildung ist) und es ist:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t) \right) \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \underbrace{\left(\frac{dx_\varepsilon}{dt}(t) \right)}_{=f(x_\varepsilon(t))} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(x_\varepsilon(t)) \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} Df(x_0(t)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t) = Df(y(t)) \cdot \xi(t) = A(t)\xi(t). \end{aligned}$$

□

Kommentar 4.10.

(a) Die lineare DGL

$$\dot{\xi} = Df(y(t)) \cdot \xi$$

wird als *Variationsgleichung von $\dot{x} = f(x)$ entlang von y* (oder auch als *Linearisierung von $\dot{x} = f(x)$ in y*) bezeichnet.

(b) Ist insbesondere $y(t) = y_0$ für alle $t \in I(y_0) = \mathbb{R}$, y_0 also eine Gleichgewichtslage, also $f(y_0) = 0$, und ist $A := Df(y_0) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, so ist die Variationsgleichung die autonome lineare Gleichung

$$\dot{\xi} = A\xi.$$

(c) Man erhofft sich das qualitative Verhalten der Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ in der Nähe der (bekannten) Lösung $t \mapsto y(t)$ durch die (einfacher zu beschreibenden) Lösungen $t \mapsto \xi(t)$ von $\dot{\xi} = A\xi$ mit $\xi(0)$ nahe bei $\xi_0 = 0$ beschreiben zu können.

19.07.2021

Wiederholung.

(a) Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $y: I \rightarrow G$ eine Lösung von

$$\dot{x} = f(x)$$

und

$$A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad A(t) := Df(y(t)),$$

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

wobei $A(t)$ im Allgemeinen nur noch stetig ist, da f eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist. Dann heißt

$$\dot{\xi} = A(t)\xi \quad (\text{L})$$

die in y linearisierte Gleichung von $\dot{x} = f(x)$.

Kommentar: Will man

$$\dot{x} = f(t, x)$$

eindeutig lösen, so zeigt der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, dass man für f nur folgende Regularität braucht:

- f ist stetig.
- f ist in x -Richtung lokal Lipschitz-stetig.

Die rechte Seite $(t, \xi) \mapsto A(t)\xi$ in (L) erfüllt diese Bedingung. Wir können also die übliche lineare Theorie anwenden. Bezeichne nun mit

$$\Phi: I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

die Lösung des Anfangswertproblems auf $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{1}_n.$$

Die Spalten von Φ sind dann Lösungs-Fundamentalsystem von $\dot{\xi} = A(t)\xi$ auf \mathbb{R}^n .

- (b) $x: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \rightarrow G$, $(\varepsilon, t) \mapsto x(\varepsilon, t) =: x_\varepsilon(t)$ sei eine \mathcal{C}^2 -Abbildung. dann heißt (x_ε) Variation von Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ von y , wenn x_ε Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ und $x_0 = y$. Es heißt dann

$$\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \xi(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t)$$

das zugehörige *Variationsvektorfeld* von (x_ε) .

- (c) ξ ist dann Lösung von (L).

Definition 4.11. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu) = f_\mu(x)$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Man nennt dann f ein *parameterabhängiges Vektorfeld auf G* und

$$\dot{x} = f_\mu(x)$$

die zugehörige *parameterabhängige* gewöhnliche DGL auf G .

Proposition 4.12. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein parameterabhängiges Vektorfeld auf G . Sei $\Omega_\mu \subseteq \mathbb{R} \times G$ und $\varphi_\mu: \Omega_\mu \rightarrow G$ das zu $\dot{x} = f_\mu(x)$ gehörende (maximale) dynamische System auf G . Dann gilt:

$$\Omega := \{(t, x, \mu) \in \mathbb{R} \times G \times U: (t, x) \in \Omega_\mu\}$$

ist offen und $\varphi: \Omega \rightarrow G$

$$\varphi(t, x, \mu) = \varphi_\mu^t(x)$$

ist stetig.

Kommentar 4.13. Die Proposition 4.12 besagt im Wesentlichen, dass die Lösungen von $\dot{x} = f_\mu(x)$ nicht nur stetig von den Anfangswerten, sondern auch *stetig vom Parameter* abhängen, d.h.: Ist $(x_0, \mu_0) \in G \times U$ (fest) und $t_0 \in I_{\mu_0}(x_0)$, so ist $t_0 \in I_\mu(x_0)$, für alle μ aus einer offenen Umgebung von μ_0 und es gilt:

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \varphi_\mu^t(x_0) = \varphi_{\mu_0}^t(x_0).$$

Beweis von Proposition 4.12. Betrachte das Vektorfeld $g: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$

$$g(x, \mu) = (f_\mu(x), 0).$$

Dann ist g lokal Lipschitz-stetig (und die Picard-Lindelöf-Theorie gilt natürlich auch für offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ statt für Gebiete, da man sie auf jede Zusammenhangskomponente einzeln anwenden kann). Das zugehörige dynamische System von $\dot{z} = g(z)$ auf $G \times U$, also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\mu(x) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

werde mit $\Phi: \Omega \rightarrow G \times U$ bezeichnet mit $\Phi(t, x, \mu) = (\psi^t(x, \mu), \mu)$, weil $\dot{\mu} = 0$ natürlich durch $\mu(t) = \mu$ gelöst wird. Hierbei ist $\psi: \Omega \times U \rightarrow G$ stetig, sogar lokal Lipschitz-stetig nach Satz 4.2. Dann muss für jedes $(x, \mu) \in G \times U$ die Kurve $t \mapsto \psi^t(x, \mu)$ die maximale Lösungskurve von $\dot{x} = f_\mu(x)$ zum Anfangswert x sein. Also

$$\psi^t(x, \mu) = \varphi_\mu^t(x), \quad \forall (t, x, \mu) \in \Omega.$$

Also ist

$$\{(t, x, \mu) \in \mathbb{R} \times G \times U: (t, x) \in \Omega_\mu\} = \Omega$$

und damit offen. (Wir haben in der letzten Stunde gezeigt, dass diese Menge offen ist.) Schließlich ist $(t, x, \mu) \mapsto \varphi_\mu^t(x)$ stetig, weil Φ es ist (sogar lokal Lipschitz-stetig). \square

Satz 4.14 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten). *Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, $y_0 \in G$ und $y: I \rightarrow G$ die (maximale) Lösung des (AWP)*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y_0.$$

Sei $\Phi: I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ die Lösung von

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{1}_n$$

auf $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $A(t) = Df(y(t))$.

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

Dann gilt für das dynamische System $\varphi: \Omega \rightarrow G$ von $\dot{x} = f(x)$ für alle $t \in I$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} \left(\varphi^t(y_0 + \xi) - \varphi^t(y_0) - \Phi(t)\xi \right) = 0.$$

Kommentar 4.15. Beachte, dass wegen 4.2 es zu einer festen Zeit $t \in I(y_0)$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(y_0) \subseteq G$ gibt, so dass $t \in I(y_0 + \xi)$ ist, für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$. Deshalb ist die Klammer in 4.14 bei festem t für $\|\xi\| < \delta$ definiert (und die Aussage macht Sinn).

Korollar 4.16. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, so sei $\varphi: \Omega \rightarrow G$ das zugehörige dynamische System. Dann ist auch φ eine C^1 -Abbildung.

Beweis von Korollar 4.16. Die partielle Ableitung in t -Richtung ist

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial t}(x) = f(\varphi^t(x))$$

sicher stetig, weil φ und f stetig sind.

Für die partielle Ableitung in x -Richtung erhalten wir nach 4.14

$$D_x \varphi(t, x) = \Phi(t; x),$$

wobei nun $\Phi: \Omega \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Lösung des parameterabhängigen Problems

$$\dot{\Phi} = A(t; x)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbb{1}_n \quad (\text{L})$$

mit

$$A: \Omega_f \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad A(t, x) = D_f(\varphi^t(x))$$

ist. Warum nun ist $(t, x) \mapsto \Phi(t; x)$ stetig? Weil die rechte Seite in (L) lokal Lipschitz-stetig (in (t, x, ξ)) ist, liefert Proposition 4.12 dann die Stetigkeit von Φ . (Fasse $x \in G$ als Parameter in (L) auf.) Es folgt: φ ist eine C^1 -Abbildung. \square

Beweis von Satz 4.14. Wir fixieren $y_0 \in G$ und $t_0 \in I(y_0)$. Sei ohne Einschränkung $t_0 > 0$. Sei nun $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(y_0) \subseteq G$ ist und $[0, t_0] \subseteq I(y_0 + \xi)$, für alle $\xi \in B_\delta(0)$. Dann:

$$\begin{aligned} \varphi^t(y_0) &\stackrel{\text{HS}}{=} y_0 + \int_0^t \frac{d}{ds} \varphi^s(y_0) ds = y_0 + \int_0^t f(\varphi^s(y_0)) ds, \\ \varphi^t(y_0 + \xi) &\stackrel{\text{HS}}{=} (y_0 + \xi) + \int_0^t \frac{d}{ds} \varphi^s(y_0 + \xi) ds = (y_0 + \xi) + \int_0^t f(\varphi^s(y_0 + \xi)) ds \\ \xi(t) &:= \Phi(t)\xi = \xi + \int_0^t Df(\varphi^s(y_0)) \xi(s) ds \end{aligned}$$

denn $t \mapsto \varphi^t(y_0)$ und $t \mapsto \varphi^t(y_0 + \xi)$ lösen ja $\dot{x} = f(x)$, während $t \mapsto \xi(t)$ das linearisierte $\dot{\xi} = A(t)\xi$ mit $A(t) = Df(\varphi^t(y_0))$ löst.

Für jedes $\xi \in B_\delta(0)$ setzen wir $g_\xi: [0, t_0] \rightarrow [0, \infty)$,

$$g_\xi(t) := \left\| \varphi^t(y_0 + \xi) - \varphi^t(y_0) - \xi(t) \right\|.$$

Wir zeigen:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{g_\xi(t)}{\|\xi\|} = 0 \quad (\text{sogar gleichmäßig auf } [0, t_0]).$$

Es ist

$$g_\xi(t) \leq \int_0^t \|f(\varphi^s(y_0 + \xi)) - f(\varphi^s(y_0)) - Df(\varphi^s(y_0))\xi(s)\| ds.$$

Weil f eine C^1 -Abbildung ist, gilt für alle $z, z_0 \in G$:

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0)(z - z_0) + R(z_0; z)$$

mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z_0; z)}{\|z - z_0\|} = 0$$

(sogar gleichmäßig in z , wenn z_0 nur aus einem Kompaktum in G stammt.).

Mit

$$z_0 = \varphi^s(y_0), \quad z = \varphi^s(y_0 + \xi) \quad (\text{bei } 0 \leq s \leq t_0)$$

ist also

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(z_0) - Df(z_0) \cdot \xi(s)\| &= \|Df(z_0)(z - z_0) + R(z_0; z) - Df(z_0) \cdot \xi(s)\| \\ &\leq \|Df(z_0)\| \cdot \underbrace{\|z - z_0 - \xi(s)\|}_{=g_\xi(s)} + \|R(z_0; z)\| \end{aligned}$$

Setze

$$M := \sup \{ \|Df(\varphi^s(y_0))\| \in [0, \infty) : s \in [0, t_0] \} < \infty$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir können dann $\delta_1 < \delta$ so klein wählen, dass für $0 \leq s \leq t_0$ und alle $z \in G$ mit $\|z - \varphi^s(y_0)\| < \delta_1$ gilt (Hier braucht man die Gleichmäßigkeit in $s \in [0, t_0]$):

$$\|R(\varphi^s(y_0); z)\| < \varepsilon \cdot \|z - \varphi^s(y_0)\|.$$

Außerdem existiert nach Satz 4.2 ein $0 < \delta_2 < \delta_1$ und $L > 0$, so dass gilt:

$$\|\varphi^s(y_0 + \xi) - \varphi^s(y_0)\| \leq \|\xi\| e^{Ls}.$$

4 Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert

Für alle $0 \leq s \leq t_0$ erhalten wir so:

$$\|R(\varphi^s(y_0); z)\| < \varepsilon \cdot \|z - \varphi^s(y_0)\| \leq \varepsilon \|\xi\| e^{Ls}.$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} g_\xi(t) &\leq M \int_0^t g_\xi(s) ds + \int_0^t \varepsilon \|\xi\| e^{Ls} ds \\ &= M \int_0^t g_\xi(s) ds + \varepsilon C \|\xi\| \quad \text{mit } C := \frac{1}{L} (e^{Lt} - 1). \end{aligned}$$

Mit Gronwalls Lemma ist also:

$$g_\xi(t) \leq \varepsilon C \|\xi\| e^{Mt_0}, \quad \forall \xi \in B_{\delta_2}(0)$$

und damit

$$\frac{g_\xi(t)}{\|\xi\|} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0 \quad (\text{gleichmäßig auf } [0, t_0]).$$

□

21.07.2021

Wiederholung. Sei $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi: \Omega \rightarrow G$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$ offen, das zu

$$\dot{x} = f(x)$$

gehörende (maximale) dynamische System.

$$\implies \varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

und $t \mapsto D_x \varphi(t, x)$ löst die in $t \mapsto x(t) = \varphi^t(x)$ linearisierte Gleichung

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{1}_n$$

mit $A(t) = Df(\varphi^t(x))$.

Korollar 4.17. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^r -Vektorfeld mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist das zu $\dot{x} = f(x)$ gehörende dynamische System $\varphi: \Omega \rightarrow G$ auch eine \mathcal{C}^r -Abbildung.

Beweis von Korollar 4.17. Es reicht, den Fall $r \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Wir führen den Beweis per Induktion nach r .

Induktionsanfang: $r = 1$ ist Korollar 4.16.

Induktionsschritt: $r \mapsto r + 1$:

Sei $f \in \mathcal{C}^{r+1}(G; \mathbb{R}^n)$. Wende jetzt die Induktionsvoraussetzung auf das \mathcal{C}^r -Vektorfeld auf

$G \times \mathbb{R}^n$ an:

$$g: G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad g(x, \xi) = (f(x), Df(x) \cdot \xi)$$

und erhalte das zu $\dot{z} = g(z)$ gehörende dynamische System

$$\psi: \Omega_g \rightarrow G \times \mathbb{R}^n,$$

also zu

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{\xi} = Df(x)\xi. \end{cases}$$

Aber die Lösung von $\dot{z} = g(z)$ ist

$$\psi^t(x, \xi) = (\varphi^t(x), D\varphi^t(x) \cdot \xi),$$

also insbesondere ist

$$\Omega_g = \Omega_f \times \mathbb{R}^n,$$

denn man kann ja die 1. Gleichung in (*) entkoppelt durch $t \mapsto \varphi^t(x)$ lösen, setzt dann die Lösung $t \mapsto \varphi^t(x)$ in die 2. Gleichung ein und erhält die Gleichung

$$\dot{\xi} = A(t)\xi$$

mit $A(t) = Df(\varphi^t(x))$. Diese ist aber gerade durch $t \mapsto D\varphi(t, x)$ gegeben. Insbesondere ist also $(t, x) \mapsto D\varphi(t, x)$ eine \mathcal{C}^r -Abbildung.

Weil $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$ eine \mathcal{C}^r -Abbildung ist und f auch (f ist sogar eine \mathcal{C}^{r+1} -Abbildung nach Voraussetzung), ist auch

$$(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = f \circ \varphi^t(x)$$

eine \mathcal{C}^r -Abbildung. Also ist φ eine \mathcal{C}^{r+1} -Abbildung. □

5 Qualitative Theorie

Motivation 5.1. Im Allgemeinen kann man keineswegs eine gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ ($f \in \mathcal{C}^1(G; \mathbb{R}^n)$) auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ explizit integrieren. Deshalb fragt man „nur“ qualitativ nach dem *Langzeitverhalten* der Lösungen, z.B.:

- Für welche Punkte (bzw. Anfangslagen) $x \in G$ ist $t_{\pm}(x) = \pm\infty$?
- Nähert sich $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einer Gleichgewichtslage, einer periodischen Bahn, oder liegt $\{x(t) \in G : t \in [0, \infty)\}$ vielleicht dicht in G ?
- Welche Gleichgewichtslagen sind stabil?

Definition 5.2. Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R} \times G_1$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R} \times G_2$ offen sowie $\varphi_1: \Omega_1 \rightarrow G_1$, $\varphi_2: \Omega_2 \rightarrow G_2$ dynamische Systeme auf G_1 bzw. G_2 . Es heißen dann φ_1 und φ_2 *äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus ¹ $u: G_1 \rightarrow G_2$ gibt, so dass für alle $x \in G_1$ gilt:

- $(t, x) \in \Omega_1 \Leftrightarrow (t, u(x)) \in \Omega_2 \quad (\Leftrightarrow I(x) = I(u(x)))$
- Für alle $t \in I(x)$:

$$u(\varphi_1^t(x)) = \varphi_2^t(u(x)).$$

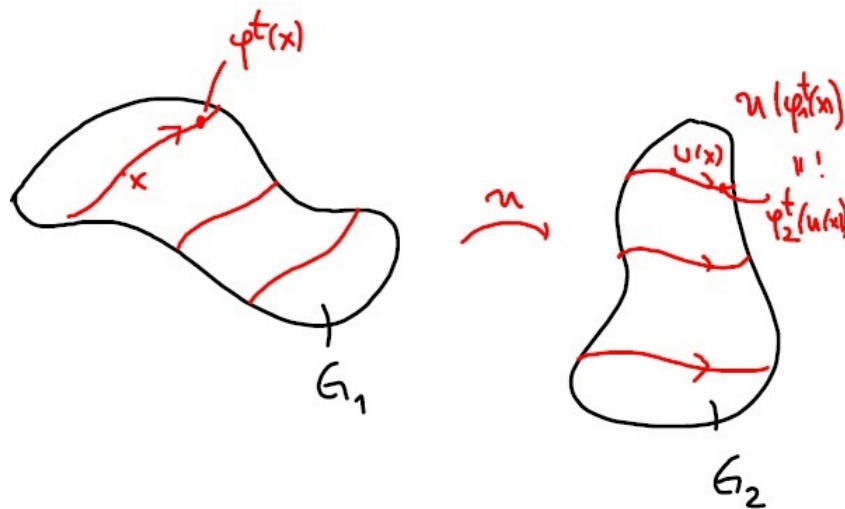


Abbildung 5.1: Anschauliche Bedeutung von Definition 5.2. Im Prinzip sagt Definition 5.2(ii), dass es bei äquivalenten dynamischen Systemen keine Rolle spielen darf, ob man zunächst $\varphi_1^t(x)$ betrachtet und dann mit dem Diffeomorphismus u abbildet, oder ob man vom bereits abgebildeten Punkt $u(x)$ ausgeht und dann φ_2^t darauf anwendet.

Frage: Was bedeutet das für die zugehörigen Vektorfelder?

¹Erinnerung: Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive Abbildung, die stetig differenzierbar ist und ihre Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist.

5 Qualitative Theorie

Proposition 5.3. Seien $D, G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete sowie $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ \mathcal{C}^1 -Vektorfelder und $\psi: \Omega_1 \rightarrow D$ sowie $\varphi: \Omega_2 \rightarrow G$ die zu $\dot{y} = g(y)$ bzw. $\dot{x} = f(x)$ gehörenden dynamischen Systeme. Dann gilt: ψ und φ sind genau dann äquivalent vermöge eines Diffeomorphismus' $u: D \rightarrow G$, wenn gilt:

$$g(y) = Du(y)^{-1} \cdot f(u(y))$$

Kommentar 5.4. Deshalb nennen wir zwei \mathcal{C}^1 -Vektorfelder $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $u: D \rightarrow G$ gibt mit

$$g = Du^{-1}(f \circ u).$$

Beweis von Proposition 5.3. „ \Rightarrow “. Ist $u: D \rightarrow G$ mit

$$u \circ \psi^t(y) = \varphi^t \circ u(y), \quad \forall t \in I(y), \forall y \in D,$$

so ist:

$$\begin{aligned} f(u(y)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^t(u(y)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u \circ \psi^t(y) \stackrel{\text{KR}}{=} Du(\psi^0(y)) \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi^t(y) \\ &= Du(y)g(y) \\ \Rightarrow g(y) &= Du(y)^{-1}(f(u(y))). \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “. Sei $g = (Du)^{-1}(f \circ u)$. Wir setzen

$$\tilde{\psi}^t(y) := u^{-1} \circ \varphi^t \circ u(y), \quad \forall t \in I(u(y)).$$

Dann ist:

$$\tilde{\psi}^0 = u^{-1} \circ \varphi^0 \circ u = u^{-1} \circ \text{id} \circ u = \text{id};$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{t+s} &= u^{-1} \circ \varphi^{t+s} \circ u = u^{-1} \circ \varphi^t \circ \varphi^s \circ u \\ &= (u^{-1} \circ \varphi^t \circ u) \circ (u^{-1} \circ \varphi^s \circ u) = \tilde{\psi}^t \circ \tilde{\psi}^s, \end{aligned}$$

also ist $\tilde{\psi}$ dynamisches System auf D . $\tilde{\psi}$ ist auch maximal, weil φ es ist. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{\psi}^t(y) &\stackrel{\text{KR}}{=} Du^{-1}(\varphi^0 \circ u)(y) \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^t(u(y)) \\ &= Du(y)^{-1} \cdot f(\varphi^t(u(y))) \Big|_{t=0} \\ &= Du(y)^{-1} f(\varphi^0(u(y))) = Du(y)^{-1} f(u(y)) = g(y) \end{aligned}$$

und damit $\tilde{\psi} = \psi$. Also gilt

$$u \circ \psi = \varphi \circ u,$$

d.i.: φ und ψ sind äquivalent. □

Satz 5.5. Sei $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Sei $p \in \tilde{G}$ mit $f(p) \neq 0$. Sei weiter $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$g(y) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T.$$

Dann gilt: Es existieren offene (zusammenhängende) Umgebungen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ von $q = 0$ in \mathbb{R}^n und $G \subseteq \tilde{G}$ von p , so dass $g|_D$ und $f|_G$ äquivalent sind.

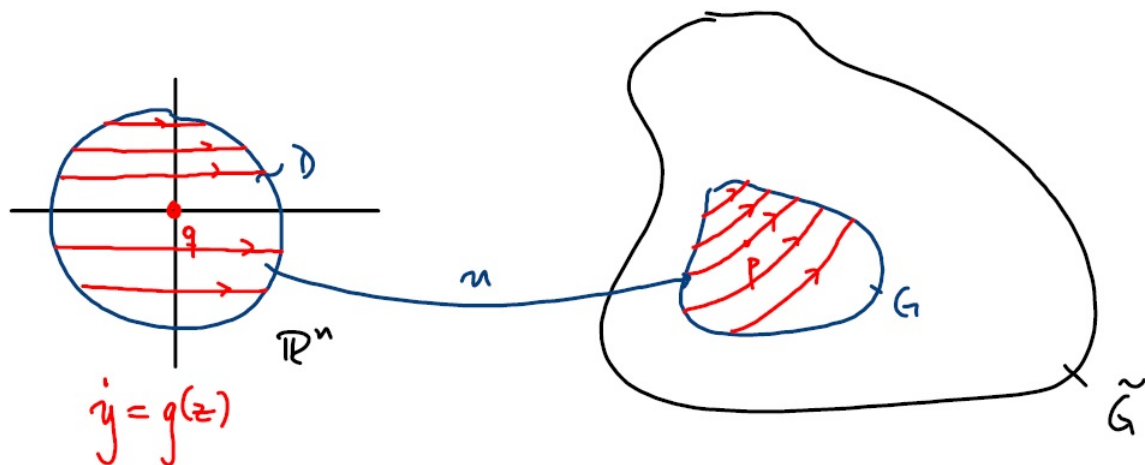


Abbildung 5.2: Anschauliche Bedeutung von Satz 5.5. Der Fluss zu g (rote Linien in D) sind gerade Parallelen. Da p keine Gleichgewichtslage von f ist, findet man auch in ganz G keine Gleichgewichtslagen von f (für G klein genug). Satz 5.5 sagt uns nun, dass man immer einen Diffeomorphismus u findet, welcher die auf D und G eingeschränkten dynamischen Systeme ineinander transformiert. Dynamische Systeme in einer Umgebung von Nicht-Gleichgewichtslagen sehen also bis auf Äquivalenz alle gleich aus.

Kommentar 5.6.

(a) Der Fluss $(\psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ zu $\dot{y} = g(y)$ (vgl. Abb. 5.2) ist natürlich durch

$$\psi^t(y) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$$

gegeben, denn das löst offenbar

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1 \\ \dot{y}_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= 0. \end{aligned}$$

5 Qualitative Theorie

Der Satz stellt eine lokale Normalform für alle Punkte $p \in G$ in allen dynamischen Systemen in einer Umgebung eines *nicht-singulären* Punktes (d.h. einer „Nicht-Gleichgewichtslage“) her.

- (b) Umgebungen von Gleichgewichtslagen können nicht äquivalent zu Umgebungen von Nicht-Gleichgewichtslagen sein, da für $g = Du^{-1}(f \circ u)$ bei $f(u(y)) = 0$ auch $g(y) = 0$ folgt. Wann Gleichgewichtslagen zueinander äquivalent sind, bleibt zunächst offen.

26.07.2021

Wiederholung. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, $p \in G$ ein nicht-singulärer Punkt, $f(p) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subseteq G$ von p und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $q = 0$, so dass für $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto e_1$, $f|_U$ und $g|_V$ äquivalent sind.

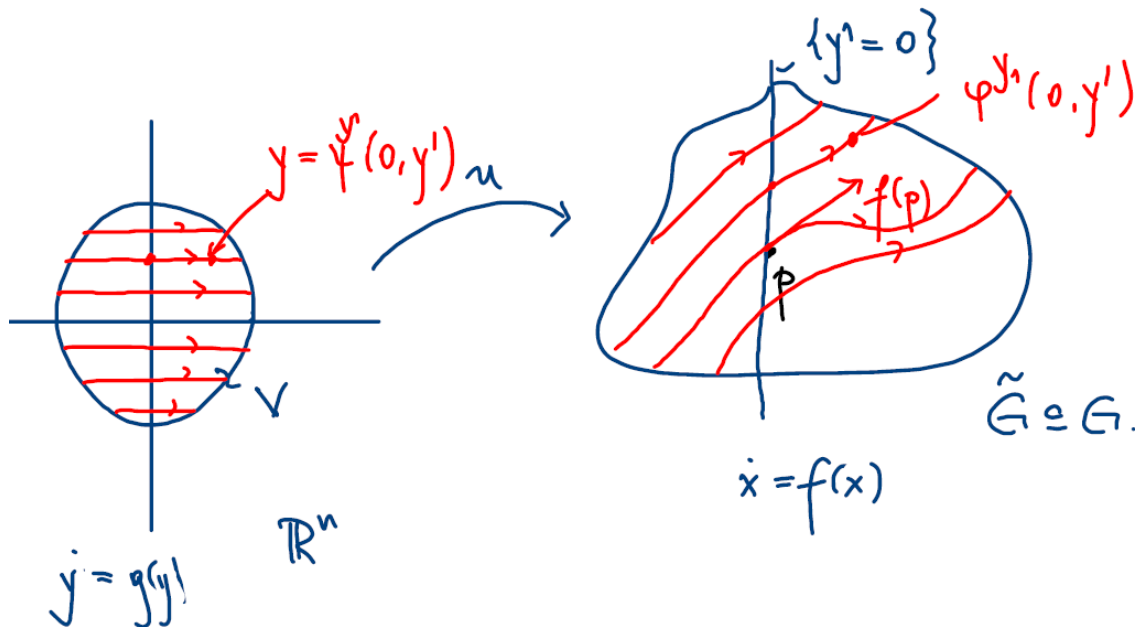


Abbildung 5.3: Zur Wiederholung von Satz 5.5. Zur genauen Erklärung siehe Abbildung 5.2.

Das dynamische System zu $\dot{y} = g(y)$ ist

$$\psi^t(y) = (y^1 + t, y^2, \dots, y^n).$$

Beweis von Satz 5.5. Sei o.E. $p = 0$ (sonst gehe zu $x \mapsto f(x - p)$ über) und

$$f^1(p) \neq 0.$$

Idee: Setze für $H = \{y \in \mathbb{R}^n : y^1 = 0\}$

$$u|_H = \text{id}_H.$$

Folge nun dem Fluss von f :

$$u(y^1, y') := \varphi^{y^1}(0, y'),$$

wo $y' = (y^2, \dots, y^n)$ ist.

Wähle dabei $\delta > 0$ so klein, dass $\varphi^t(y)$ für $\|y\| < \delta$ und $|t| < \delta$ definiert ist, also

$$u: B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Es ist dann u stetig differenzierbar und es ist

$$\varphi^t \circ u(y) = \varphi^t \circ \varphi^{y^1}(0, y') = \varphi^{t+y^1}(0, y') = u(t + y_1, y') = u(\psi^t(y))$$

Außerdem ist

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi^t(0, 0) = f(0)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y_k}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi^0(te_k) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (te_k) = e_k$$

für $k = 2, \dots, n$. Also ist

$$Du(0) = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_2(0) & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & \\ f_n(0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\det Du(0) = f_1(0) \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gibt es deshalb offene Umgebungen $D \subseteq B_\delta(0)$ von 0 und $G \subseteq \tilde{G}$ von $u(0) = 0$ mit $u(D) = G$, so dass $u: D \rightarrow G$ ein Diffeomorphismus ist. Also sind g und f lokal um $q = 0$ und p tatsächlich äquivalent. \square

Frage 5.7. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Gleichgewichtslagen lokal äquivalent sind? Gibt es „Invarianten“?

Beispiel 5.8. $q = 0$ von $\dot{x} = x$ kann nicht lokal äquivalent zu $p = 0$ von $\dot{x} = -x$ sein:

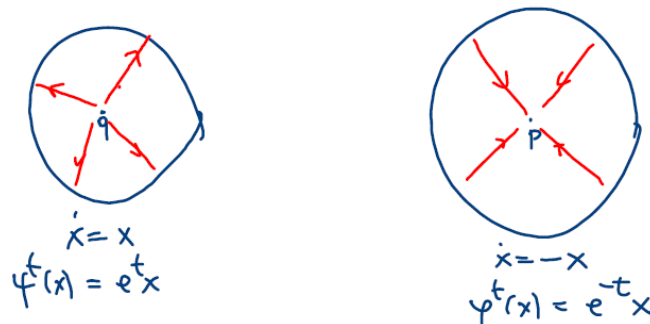


Abbildung 5.4: Zu Beispiel 5.8. Links hat man in q eine sogenannte *Quelle*, rechts eine *Senke*.

5 Qualitative Theorie

Definition 5.9. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $p \in G$ ein *singulärer Punkt* von f , d.h.: $f(p) = 0$.

- (a) Wir nennen p *+stabil*, wenn $t_+(p) = +\infty$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B_\delta(p)$ gilt:
- $t_+(x) = \infty$
 - $\|x(t) - p\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \infty)$.
- (b) p heißt *asymptotisch +stabil* (oder ein *Attraktor*), wenn gilt:
- p ist +stabil.
 - $\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(p): t_+(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$.

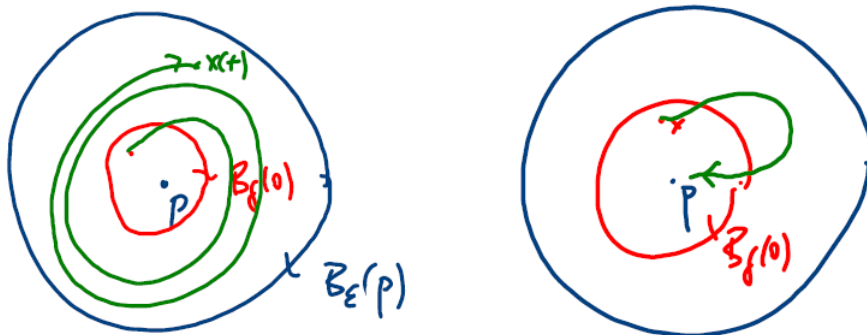


Abbildung 5.5: Zu Definition 5.9. (a) Links: p ist +stabil. Wann immer man mit einem Startwert innerhalb von $B_\delta(p)$ startet, darf die zugehörige Lösungskurve niemals $B_\varepsilon(p)$ verlassen. (b) Rechts: p ist ein Attraktor. Im Unendlichen läuft die Kurve zurück auf p .

Beispiel 5.10. Sei $G = \mathbb{R}^2$.

- (a) $p = 0$ ist Attraktor von $\dot{x} = -x$ (siehe Abbildung 5.4). Die Funktion

$$t \mapsto \|\varphi^t(x)\| = \|e^{-t}x\| = e^{-t}\|x\|$$

ist sogar monoton fallend und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- (b) $p = 0$ ist *stabil* (d.h. +stabil und --stabil), aber kein Attraktor von

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

(Erinnere: $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ist ein 1. Integral.)

- (c) $p = 0$ ist nicht +stabil (allerdings --stabil) für

$$\dot{x} = +x$$

(siehe Abbildung 5.4), denn $\varphi^t(x) = e^t x$ verlässt für $t \rightarrow \infty$ jedes Kompaktum von \mathbb{R}^2 für $x \neq 0$.

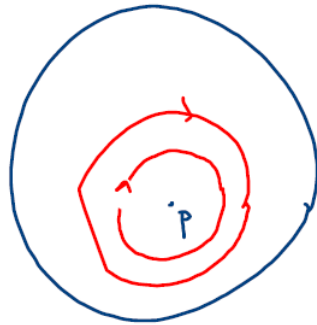


Abbildung 5.6: Zu Beispiel 5.10 (b). Hier ist p offensichtlich kein Attraktor.

Kommentar 5.11.

- (a) Die Eigenschaften $--$ -stabil (und stabil) definiert man entsprechend für $t \rightarrow -\infty$.
- (b) Die Eigenschaften $+$, $--$ -Stabilität bzw. asymptotische Stabilität bleiben unter Äquivalenz erhalten.

Definition 5.12. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld und $p \in G$ ein *singulärer Punkt* von f , d.h.: $f(p) = 0$. Ist $A = Df(p) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, so heißen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die sogenannten *charakteristischen Exponenten* von p .

Kommentar 5.13. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A und $\xi_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor von A zu λ , so gilt für die Lösung $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ von

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad \xi(0) = \xi_0$$

auf \mathbb{C}^n :

$$\xi(t) = e^{tA}\xi_0 = e^{\lambda t}\xi_0,$$

denn

$$e^{tA}\xi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \underbrace{A^k \xi_0}_{=\lambda^k \xi_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda^k \cdot \xi_0 = e^{\lambda t} \xi_0.$$

Daher der Name „charakteristischer Exponent“.

Proposition 5.14. Seien $q \in D$ und $p \in G$ *singuläre Punkte* von \mathcal{C}^1 -Vektorfeldern $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D, G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete). Sind q und p *lokal äquivalent*, so müssen die *charakteristischen Exponenten* von f in p und g in q *übereinstimmen*.

Beweis. Nach Verkleinerung von D und G dürfen wir annehmen, dass g und f äquivalent sind vermöge eines Diffeomorphismus $u: D \rightarrow G$ mit $u(q) = p$, also:

$$g(y) = Du(y)^{-1}f(u(y)). \tag{5.1}$$

5 Qualitative Theorie

Sei

$$Du(y)^{-1} =: \left(a_j^i(y) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Eintragsweise bedeutet Gleichung (5.1) dann $(g = (g^1, \dots, g^n), y = (y^1, \dots, y^n))$

$$g^i(y) = a_j^i(y) f^j(u(y)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Einsteinsche Summenkonvention: Taucht ein Index in einer Formel doppelt auf – einmal oben und einmal unten – so summiere von 1 bis n .

Es folgt mit der Produkt- und Kettenregel:

$$\frac{\partial g^i}{\partial y^k}(q) = \frac{\partial a_j^i}{\partial y^k}(q) \cdot \underbrace{f^j(q)}_{=0} + a_j^i(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} (f^j \circ u)(y) = a_j^i(q) \frac{\partial f^j}{\partial x^l}(p) \cdot \frac{\partial u^l}{\partial y^k}(q) \quad (1 \leq i, k \leq n),$$

also wieder in Matrix-Schreibweise:

$$Dg(q) = S^{-1} \cdot Df(p) \cdot S$$

mit $S = Dn(q) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. also haben $Dg(q)$ und $Df(p)$ die gleichen Eigenwerte. \square

Kommentar 5.15. Der Beweis zeigt, dass sogar die Konjugationsklasse von $A = Df(p) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine *Invariante* unter Äquivalenz ist.

Proposition 5.16. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $\xi_0 = 0$ ein Attraktor für

$$\dot{\xi} = A\xi$$

auf \mathbb{C}^n . Dann gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A :

$$\Re(\lambda) < 0.$$

Beweis. Es gibt also ein $\delta > 0$ so klein, dass für alle $\eta \in \mathbb{C}^n$ mit $\|\eta\| < \delta$ gilt: $\eta(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A . Dann gibt es einen Eigenvektor $\eta \in \mathbb{C}^n$ von λ und wir können $\|\eta\| < \delta$ wählen:

$$A\eta = \lambda\eta.$$

Dann folgt:

$$\eta(t) = \exp(tA)\eta = e^{\lambda t}\eta,$$

also

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\| &= \|e^{\lambda t}\eta\| = |e^{\lambda t}| \cdot \|\eta\| = |e^{(\Re(\lambda) + i\Im(\lambda))t}| \cdot \|\eta\| \\ &= |e^{\Re(\lambda)t} \cdot e^{i\Im(\lambda)t}| \cdot \|\eta\| = e^{\Re(\lambda)t} \cdot \underbrace{|e^{i\Im(\lambda)t}|}_{=1} \cdot \|\eta\| = e^{\Re(\lambda)t} \cdot \|\eta\|. \end{aligned}$$

Aus $\eta(t) \rightarrow 0$ folgt daher: $\Re(\lambda) < 0$. \square

Frage. Umgekehrt: Sind alle Realteile der Eigenwerte negativ, ist dann $\xi_0 = 0$ auch ein Attraktor?

28.07.2021

Wiederholung. Ist $\xi_0 = 0$ ein Attraktor für $\dot{\xi} = A\xi$ ($A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$) auf \mathbb{C}^n , so gilt $\Re(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte λ von A .

kurz: Attraktor \Rightarrow Senke (bei linearen Systemen).

Ziel: Senke \Rightarrow Attraktor?

Erinnerung 5.17. Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind äquivalent.

Definition 5.18. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum (komplex oder reell), $n = \dim(V)$, und $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann definieren wir die zu \mathfrak{B} gehörende Norm

$$\| \cdot \|_{\mathfrak{B}} : V \rightarrow [0, \infty)$$

so:

$$\|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2 := \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2, \quad \text{falls } \xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

Kommentar 5.19.

- (a) Ist $A: V \rightarrow V$ linear, so erhält man die zu \mathfrak{B} gehörende Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow [0, \infty)$, durch

$$\|A\|_{\mathfrak{B}} := \sup \{ \|A\xi\|_{\mathfrak{B}} \in [0, \infty) : \|\xi\|_{\mathfrak{B}} \leq 1 \}$$

- (b) Für die kanonische Basis $\mathfrak{A} = (e_1, \dots, e_n)$ von \mathbb{C}^n (bzw. \mathbb{R}^n) erhält man die euklidische Norm,

$$\| \cdot \|_{\mathfrak{A}} = \| \cdot \|_2 = \| \cdot \|_{\text{std.}} = \| \cdot \|$$

- (c) Ist $V = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ der Koordinatenwechsel, $Se_j = v_j$ ($j = 1, \dots, n$), so gilt offenbar für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$\|\xi\|_{\mathfrak{B}} = \|S^{-1}\xi\|_{\text{std.}}$$

- (d) Natürlich kommt $\| \cdot \|_{\mathfrak{B}}: V \rightarrow [0, \infty)$ von einem Skalarprodukt (bzw. Hermiteschen Produkt) her, nämlich von

$$\langle -, - \rangle_{\mathfrak{B}} : V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j \quad \text{für } \xi = \sum_j \alpha_j v_j, \quad \eta = \sum_j \beta_j v_j.$$

5 Qualitative Theorie

Lemma 5.20. Sei \mathfrak{B} eine Basis von \mathbb{C}^n und $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ die zugehörige Norm auf \mathbb{C}^n bzw. auf $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Für $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ gebe es ein $\beta \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\Re \langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}} \leq \beta \cdot \|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2.$$

Dann gilt:

$$\|\exp(tA)\|_{\mathfrak{B}} \leq e^{\beta t}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Beweis. Es ist mit $\xi(t) = \exp(tA) \cdot \xi$ ($\xi \in \mathbb{C}^n$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}}^2 &= \frac{d}{dt} \langle \xi, \xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) \stackrel{\text{PR}}{=} \langle \dot{\xi}, \xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) + \langle \xi, \dot{\xi} \rangle_{\mathfrak{B}}(t) \\ &= \langle A\xi, \xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) + \langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) = \overline{\langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}}}(t) + \langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) \\ &= 2\Re \langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}}(t) \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} 2\beta \|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}}^2. \end{aligned}$$

Mit $u: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $u(t) = \|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}}^2$ und dem Hauptsatz haben wir deshalb für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(t) - u(0) &= \int_0^t \frac{d}{ds} u(s) ds \leq \int_0^t 2\beta u(s) ds \\ \implies u(t) &\leq u(0) + 2\beta \int_0^t u(s) ds \end{aligned}$$

Dann folgt mit Gronwalls Lemma, dass

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}}^2 &\leq \|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2 e^{2\beta t} && \forall t \in [0, \infty) \\ \implies \|\exp(tA) \cdot \xi\|_{\mathfrak{B}}^2 &\leq \|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2 e^{2\beta t} && \forall \xi \text{ mit } \|\xi\|_{\mathfrak{B}} \leq 1, \forall t \geq 0 \\ \implies \|\exp(tA)\| &= \sup \{ \dots \} \leq e^{\beta t} && \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

□

Satz 5.21. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A sei $\Re(\lambda) < 0$. Dann ist $\xi_0 = 0$ ein Attraktor für $\dot{\xi} = A\xi$ auf \mathbb{C}^n .

Beweis. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}^n$ ist die Lösung $t \mapsto \xi(t)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, von $\dot{\xi} = A\xi$ auf \mathbb{C}^n gegeben durch

$$\xi(t) = \exp(tA)\xi.$$

Für jede Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von \mathbb{C}^n ist daher

$$\|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}} \leq \|\exp(tA)\|_{\mathfrak{B}} \cdot \|\xi\|_{\mathfrak{B}}.$$

Wir zeigen, dass

$$\|\exp(tA)\|_{\mathfrak{B}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

für eine geeignete Basis \mathfrak{B} . Dann folgt: $\xi_0 = 0$ ist (sogar *globaler*) Attraktor.

Dazu: Wähle zunächst ein $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D + N$$

ist mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $b_i \in \{0, 1\}$ ($i = 2, \dots, n$) (Jordans Normalform). Nun mache noch für $\varepsilon > 0$ eine weitere Koordinatentransformation

$$T := \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Für

$$\begin{aligned} C &:= T^{-1}BT = (ST)^{-1}A(ST) \\ C &= \text{diag}\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, \dots, \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon \lambda_2 & \varepsilon^2 b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \varepsilon^2 \lambda_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \varepsilon^{n-1} b_n \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon^{n-1} \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \varepsilon b_n \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = D + \varepsilon N. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\Re(\langle \eta, C\eta \rangle) : \left(\sum_{j=1}^n \Re(\lambda_j) \right) \|\eta\|^2 + \varepsilon \Re(\langle \eta, N\eta \rangle).$$

Aber

$$\begin{aligned} \Re(\langle \eta, N\eta \rangle) &= \varepsilon \left(b_2 \underbrace{\eta_1 \bar{\eta}_2}_{\leq \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \bar{\eta}_2^2)} + b_3 \eta_2 \bar{\eta}_3 + \dots + b_n \eta_{n-1} \bar{\eta}_n \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \left(b_2 (\eta_1^2 + \bar{\eta}_2^2) + b_3 (\eta_2^2 + \bar{\eta}_3^2) + \dots + b_n (\eta_{n-1}^2 + \bar{\eta}_n^2) \right) \\ &\leq \varepsilon \left(|\eta_1|^2 + \dots + |\eta_n|^2 \right) = \varepsilon \cdot \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

5 Qualitative Theorie

Insgesamt erhalten wir also

$$\Re\langle \eta, C\eta \rangle \leq \alpha \cdot \|\eta\|^2 + \varepsilon \cdot \|\eta\|^2 = (\alpha + \varepsilon) \cdot \|\eta\|^2$$

wenn wir

$$\alpha := \max_{j=1}^n \Re(\lambda_j) < 0$$

setzen.

Sei \mathfrak{B} nun die Basis, die durch den Koordinatenwechsel $ST \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ gegeben ist, also

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathfrak{B}} = \left\langle (ST)^{-1} \xi, (ST)^{-1} \xi \right\rangle_{\text{std.}}$$

und

$$\|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2 = \left\| (ST)^{-1} \xi \right\|_{\text{std.}}^2 = \|\eta\|^2 \quad \text{mit} \quad \eta := (ST)^{-1}(\xi).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Re(\langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}}) &= \Re\left(\left\langle (ST)^{-1} \xi, (ST)^{-1} A\xi \right\rangle\right) \\ &= \Re\left\langle \eta, \underbrace{(ST)^{-1} A (ST)}_{=C} \eta \right\rangle = \Re\langle \eta, C\eta \rangle \\ &\leq (\alpha + \varepsilon) \cdot \|\eta\|^2 = (\alpha + \varepsilon) \cdot \|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2. \end{aligned}$$

Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\beta := \alpha + \varepsilon < 0$$

ist. Dann ist also

$$\begin{aligned} \Re\langle \xi, A\xi \rangle_{\mathfrak{B}} &\leq \beta \cdot \|\xi\|_{\mathfrak{B}}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n \\ \xrightarrow{\text{La. 5.20}} \|\exp(tA)\|_{\mathfrak{B}} &\leq e^{\beta t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\implies \xi_0 = 0$ ist ein Attraktor für $\dot{\xi} = A\xi$ auf \mathbb{C}^n . □

Kommentar 5.22.

- (a) Ist $p \in G$ ein singulärer Punkt eines \mathcal{C}^1 -Vektorfeldes $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, so nennt man p eine *Senke*, wenn für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $Df(p) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ gilt: $\Re(\lambda) < 0$. Proposition 5.16 zusammen mit Satz 5.21 zeigt dann, dass für lineare Systeme $\dot{\xi} = A\xi$ ($A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$) $\xi_0 = 0$ genau dann ein Attraktor ist, wenn ξ_0 eine Senke ist.
- (b) Frage: Kann man auch im nicht-linearen Fall ähnliche Aussagen treffen?

Motivation 5.23. $t \mapsto \|\exp(tA)\|_{\mathfrak{B}}$ strebt i.A. nicht monoton fallend gegen 0.

Idee: Versuche eine Norm $\|\cdot\|_A: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, \infty)$ zu finden, so dass für die Lösungen $t \mapsto \xi(t)$ von $\dot{\xi} = A\xi$ auf \mathbb{C}^n gilt, dass $t \mapsto \|\xi(t)\|_A$ sogar monoton fallend gegen Null strebt.

Definition 5.24. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ so, dass für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gelte: $\Re(\lambda) < 0$. Die *Liapunov-Norm*

$$\|\cdot\|_A: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$$

zu A ist so definiert:

$$\|\xi\|_A^2 := \int_0^\infty \|\exp(tA)\xi\|^2 dt$$

Kommentar 5.25.

- (a) Nur weil $\Re(\lambda) < 0$ ist, für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A , ist $\|\cdot\|_A$ wohldefiniert, denn der Beweis von Satz 5.21 zeigt, dass es Konstanten $c > 0$ und $\beta < 0$ gibt mit:

$$\|\xi(t)\|^2 \leq c \|\exp(tA)\xi\|_{\mathfrak{B}}^2 \cdot \|\xi\|^2 \leq ce^{2\beta t} \cdot \|\xi\|^2$$

(für eine geeignete Basis \mathfrak{B} von \mathbb{R}^n). Also ist

$$\int_0^\infty \|\exp(tA)\xi\|^2 dt = \int_0^\infty \|\xi(t)\|^2 dt \leq c \|\xi\|^2 \underbrace{\int_0^\infty e^{2\beta t} dt}_{=\frac{1}{2\beta}(0-1)} \leq -\frac{c\|\xi\|^2}{2\beta} < \infty.$$

- (b) Natürlich strebt nun die Lösung $t \mapsto \xi(t)$ in der A -Norm $\|\cdot\|_A$ monoton fallend gegen 0, denn für $t_1 < t_2$ ist

$$\|\xi(t_1)\|_A^2 - \|\xi(t_2)\|_A^2 = \int_{t_1}^{t_2} \|\xi(x)\|^2 ds > 0.$$

Proposition 5.26. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ und jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A erfülle $\Re(\lambda) < 0$. Setzt man

$$P := P(A) := \int_0^\infty \exp(tA^*) \exp(tA) dt$$

(A^* Transponierte von A), so gilt:

- (a) P ist symmetrisch und positiv definit.
 (b) Ist $\langle -, - \rangle_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ das zu P gehörende Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle_A := \langle \xi, P\eta \rangle,$$

so gilt für die Liapunov-Norm $\|\cdot\|_A$ auf \mathbb{R}^n , dass

$$\|\xi\|_A^2 = \langle \xi, \xi \rangle_A.$$

- (c) Es ist $A^*P + PA = -\mathbf{1}$ und $\frac{d}{dt}\|\xi(t)\|_A^2 = -\|\xi(t)\|^2$.

5 Qualitative Theorie

Beweis. Siehe Skript von 1998². □

Satz 5.27. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $p \in G$ eine Gleichgewichtslage und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld mit $f(p) = 0$. Dann gilt: Ist $\Re(\lambda) < 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $Df(p)$, so ist p ein Attraktor.*

(kurz: Senke \Rightarrow Attraktor, die Umkehrung gilt i.A. nicht!)

Beweis. Siehe Skript von 1998 oder Vorlesung „Dynamische Systeme“ im Wintersemester 2021/22. □

²Link: <https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/maphy/lehre/ss-2021/funktionen/dateien/skripte/98-teil-ode.pdf>