

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 1 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 22.10.21

2. Summen und vollständige Induktion¹

Als erstes wollen wir das Summenzeichen kennenlernen.

Definition https://youtu.be/b_wo-FkX53k (3 min) (1)

OK, und wozu soll das gut sein? <https://youtu.be/-H6zgHPPoAg> (3 min) (2)

Später werden wir uns auch unendliche Summen anschauen.

Kleiner Ausblick https://youtu.be/nQRxHr_4pns (4 min) (3)

Bestimmen Sie selbst:

$$\sum_{n=0}^4 (2n+1) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^5 (2n-1) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^4 (2\nu+1). \quad (4)$$

Ein paar Rechenregeln, die wir eigentlich schon kennen:

$$\sum_{\nu=n}^N (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=n}^N a_\nu + \sum_{\nu=n}^N b_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=n}^N ca_\nu = c \sum_{\nu=n}^N a_\nu \quad (5)$$

<https://youtu.be/lziHhUEKFng> (3 min)

Indexverschiebung <https://youtu.be/eRo0fUzk8bs> (3 min) (6)

Nun lernen wir ein paar konkrete Summen kennen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{\nu=1}^n \nu = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Kleiner Gauß}) \quad (7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } \sum_{\nu=0}^n x^\nu = \begin{cases} n+1 & , \quad x = 1 \\ \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & , \quad x \neq 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Geometrische} \\ \text{Summe} \end{array} \right) \quad (8)$$

Huch! Was sind das für Zeichen? https://youtu.be/QRRur_00nJA (3 min) (9)

Schreiben Sie die beiden Summen für $n = 5$ aus.

¹Die Nummerierung orientiert sich, soweit möglich, am Skript.

Wir beweisen die beiden Formeln mit vollständiger Induktion:

Kleiner Gauß https://youtu.be/Z_XEqcay0YU (4 min) (10)

Haben wir da nicht gerade das reingesteckt, was wir zeigen wollten?
<https://youtu.be/Uk-g-NvoYW4> (2 min) (11)

Geometrische Summe https://youtu.be/jPz_krkHSdE (5 min) (12)

Berechnen Sie damit:

$$\sum_{n=2}^{11} 2^{n-1} \quad (13)$$

Nicht nur Formeln mit Summen lassen sich schön mit vollständiger Induktion zeigen. Das klappt z.B. auch für die folgende Ungleichung.

$\forall n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$ <https://youtu.be/X1oh7T9RBMU> (4 min) (14)

Und da wir gerade dabei sind, beweisen wir noch schnell, dass alle einfarbigen Pferde die gleiche Farbe haben.

https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20171020_002_mathnat1_0001?t=2201.00 (6 min) (15)

Überlegen Sie selbst: Wo war der Fehler?

Damit sind wir für's erste Übungsblatt gerüstet!

Wenn Sie trotzdem zuerst weitere Videos anschauen wollen, dann biete ich Ihnen hier noch alternative Beweise für den Kleinen Gauß und die Geometrische Summe an – diesmal ohne vollständige Induktion.

Kleiner Gauß <https://youtu.be/cm0nQNLyZcA> (3 min) (16)

Geometrische Summe <https://youtu.be/qGIrd87THzA> (3 min) (17)