

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 2 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 27.10.21

3. Binomische Formel

Das Produktzeichen definieren wir analog zum Summenzeichen,

$$\prod_{j=n}^N a_j. \quad \text{https://youtu.be/mhs0DIq5hxc (2 min)} \quad (1)$$

Ein Spezialfall ist die Fakultät (Produkt der ersten n natürlichen Zahlen),

$$n! = \prod_{\nu=1}^n \nu, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

$$\text{Bestimmen Sie } 1!, 2!, 3!, 5!, 10! \text{ und } 0!. \quad (3)$$

Binomialkoeffizienten (benötigen wir unten für die binomische Formel) definieren wir für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wie folgt,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j). \quad \text{https://youtu.be/Z_c9l73oksI (3 min)} \quad (4)$$

$$\text{Bestimmen Sie } \binom{\alpha}{0} \text{ und } \binom{\alpha}{1} \text{ für beliebige } \alpha. \quad (5)$$

Speziell für ganzzahlige Argumente, genauer

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \geq k, \text{ gilt } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (6)$$

<https://youtu.be/82WLexcg0HQ> (2 min)

$$\text{Bestimmen Sie } \binom{n}{n} \text{ und } \binom{5}{7}. \quad (7)$$

Zwei wichtige Beziehungen:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad \text{https://youtu.be/C9NGmxqCzge (2 min)} \quad (8)$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{https://youtu.be/peq4MS4cycA (4 min)} \quad (9)$$

Damit können wir die Binomische Formel angeben und beweisen.

Satz 1. (Binomi)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}. \quad (10)$$

Beweis <https://youtu.be/dJiu3jbNaK0> (10 min) (11)

Im Spezialfall $a = b = 1$ finden wir eine lustige Formel für 2^n . **Probieren Sie's aus!**

Ein verwandte Beziehung (*wieso verwandt?*) ist

Satz 2. (Bernoullische Ungleichung)

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$, gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (12)$$

Beweis <https://youtu.be/-DDpQTL4E4> (3 min) (13)

Überlegen Sie: Wo haben wir benötigt, dass x nicht kleiner als -1 ist?