

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 3 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 29.10.21

4. Funktionen

Eine Funktion besteht aus Definitionsmenge und Abbildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow Z \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{https://youtu.be/WagVaWUBJ3A (3 min)} \quad (1)$$

Das Bild einer Funktion ist die Menge aller Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(D) &= \{y \in Z \mid \exists x \in D, \text{ so dass } f(x) = y\} \\ &\quad \text{https://youtu.be/3oyll-BjuUs (5 min)} \end{aligned} \quad (2)$$

Geben Sie die Bilder der Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{und} && g : [1, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1 && && x &\mapsto x^2 - 1 \quad \text{an.} \end{aligned} \quad (3)$$

Wenn Bild und Definitionsbereich zweier Funktionen zusammenpassen, so können wir sie nacheinander ausführen. Wir sprechen dann von Verkettungen.

$$\begin{aligned} \text{Notation und Beispiele...} &\quad \text{https://youtu.be/h2XyzPwmpw8 (6 min)} \\ \dots \text{mit Bemerkungen zu Intervallen und anderen Teilmengen von } \mathbb{R}. & \quad (4) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $(g \circ f)(x)$ für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^3 + 1 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = x^2 - 2. \quad (5)$$

$$\text{Weitere Beispiele.} \quad \text{https://youtu.be/YaHwkEGLC8g (5 min)} \quad (6)$$

4.1 Folngengrenzwerte

Folgen sind Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{R} , für die wir eine andere Schreibweise (mit Index) verwenden:

$$\text{Indexschreibweise} \quad \text{https://youtu.be/NdpB4V52Z5g (2 min)} \quad (7)$$

Manche Folgen haben einen

$$\text{Grenzwert bzw. Limes.} \quad \text{https://youtu.be/Uic__Y01NhQ (1 min)} \quad (8)$$

Bevor ich Sie jetzt mit einer präzisen Definition verwirre, versuchen Sie mal die folgenden Grenzwerte zu bestimmen, zu berechnen oder zu erraten (falls sie überhaupt existieren):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2. \quad (9)$$

Nun definieren wir's mal anständig.

Definition: (Grenzwert)

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert α , wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0 \exists$ ein $N(\varepsilon)$, so dass $|a_n - \alpha| < \varepsilon \forall n \geq N(\varepsilon)$.

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

https://youtu.be/oGz0_bEQzOE (3 min) (10)

Versuchen Sie damit zu begründen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Meistens wollen wir aber gar nicht mit der Definition arbeiten, sondern lieber aus einigen bekannten Grenzwerten auf weitere schließen. Dabei helfen die folgenden...

Rechenregeln für Grenzwerte

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ so gilt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$

Merke: Auseinanderziehen erlaubt, falls alles konvergent ist.

Diese Rechenregeln könnten wir nun ausgehend von der Definition beweisen, aber vielleicht schauen wir sie uns lieber anhand eines Beispiels in Aktion an:

<https://youtu.be/q9sWl1w1NTY> (5 min) (11)

Bestimmen Sie selbst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^5}{1 + n^5}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 20}{n^2} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^5}{1 - n^4}. \quad (12)$$