

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 4 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 03.11.21

4.2 Funktionsgrenzwerte

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder mit kleinerer Definitionsmenge) definieren wir $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ genau wie bei Folgengrenzwerten:

$$\text{https://youtu.be/UvK5Wye2k6Y (1 min)} \quad (1)$$

Sind wir an $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ interessiert, machen wir es so ähnlich:

$$\text{https://youtu.be/AtJLDyvrndE (3 min)} \quad (2)$$

Hier nochmal die **Definition** aus dem Video:

Eine Funktion f konvergiert für $x \rightarrow x_0$ gegen den Grenzwert α , wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0 \exists$ ein $\delta(\varepsilon)$, so dass $|f(x) - \alpha| < \varepsilon \forall x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Wir schreiben dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$.

Wichtig ist vor allem, dass der Grenzwert an der Stelle x_0 nur davon abhängt, wie sich die Funktion *in der Nähe von x_0* verhält, $f(x_0)$ ist dem Grenzwert dagegen egal.

Wir zeigen einmal mit ε und δ , dass tatsächlich

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \quad \text{https://youtu.be/Bh2XY9SjXys (4 min)} \quad (3)$$

gilt – aber, wenn uns das einen Knoten ins Hirn macht, dann vergessen wir es erst mal. . .

. . . und stellen lieber fest: Es gelten die gleichen **Rechenregeln** wie bei Folgengrenzwerten:

Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$ so gilt:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$

Merke: *Auseinanderziehen erlaubt, falls alles konvergent.*

Beispiele für Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{https://youtu.be/ig52V5DwvXs (2 min)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{https://youtu.be/we_n3xh-om4 (3 min)} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ existiert nicht} \quad \text{https://youtu.be/Nq9tSvraWZ8 (2 min)} \quad (6)$$

Und wenn wir im letzten Beispiel nur von links oder nur von rechts drauf schauen?

$$\text{https://youtu.be/1q08CWP7_A (3 min)} \quad (7)$$

Bestimmen Sie selbst

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 7x}{2x - x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 7x}{2x - x^3} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 7x}{2x - x^3}. \quad (8)$$

4.3 Stetigkeit

Wir sagen f ist stetig an der Stelle x_0 , wenn gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\text{Warum ist das toll?} \quad \text{https://youtu.be/6RKWsDxB01A (2 min)} \quad (9)$$

Weiter sagen wir f ist stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

Analog zu den Rechenregeln für Grenzwerte gilt:

1. Sind f und g stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) und fg stetig.
Außerdem ist $\frac{f}{g}$ stetig $\forall x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.
2. Sind $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I bzw. J , und ist $g(J) \subseteq I$, dann ist auch $f \circ g$ stetig auf J .

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{Monome \& Polynome sind \u00fcrberall stetig, rationale Funktionen} \\ \text{zumindest \u00fcrberall dort, wo der Nenner nicht Null ist.} \end{aligned} \quad (10)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases} \quad \text{https://youtu.be/X0eo0rGN_S0 (3 min)} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{https://youtu.be/QsEbtwmUP20 (2 min)} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{https://youtu.be/dWSU3Ai7f00 (2 min)} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{https://youtu.be/fK3xjIKp27I (2 min)} \quad (14)$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gegebenenfalls auf stetige Fortsetzbarkeit:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \quad (16)$$