

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 6 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 10.11.21

4.5 Differentiation (Fortsetzung)

Jetzt soll Klein-o aber mal sein Potential entfalten!

Regel von l'Hospital. (eigentlich von Bernoulli)

Ist $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, und sind f und g diffbar mit $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad \text{https://youtu.be/PaSlV0WnBlA (3 min)} \quad (1)$$

Übrigens: Das klappt nicht nur bei " $\frac{0}{0}$ ", sondern auch bei " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Kettenregel. Sei $f = g \circ h$. Ist h diffbar in x_0 und ist g diffbar in $h(x_0) =: y_0$, dann gilt

$$f'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0). \quad \text{https://youtu.be/1AQ7Gm4DS2c (8 min)} \quad (2)$$

Können Sie auf ähnliche Weise die Ableitung von $f \cdot g$ ausrechnen? (Produktregel)

4.6 Die Exponentialfunktion

Für die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

können wir mit etwas Bernoulli und Binomi zeigen,¹ dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2 \leq a_n \leq 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} \geq a_n. \quad (4)$$

Daraus folgt, dass der Grenzwert existiert (und zwischen 2 und 3 liegt). Wir nennen ihn e , die Eulerscher Zahl:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (5)$$

Ähnlich lässt sich zeigen, dass $\forall x \in \mathbb{R}$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ existiert. Wir nennen das Ergebnis die Exponentialfunktion,

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (6)$$

Überlegen Sie: Welchen Wert haben demnach $\exp(0)$ und $\exp(1)$?

¹Die Details lassen wir hier weg, aber im Skript stehen sie.

Nun machen wir **drei Beobachtungen**: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \text{https://youtu.be/XShRHBUEBMg (2 min)} \quad (\text{A})$$

$$\exp(x) \leq x \exp(x) + 1 \quad \text{https://youtu.be/ap62i76mmIY (3 min)} \quad (\text{B})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 \quad \text{https://youtu.be/xt_cqMCfgZU (4 min)} \quad (\text{C})$$

Mithilfe dieser Beobachtungen können wir zeigen, dass \exp eine hübsche Funktion mit den folgenden Eigenschaften ist.

Satz 5. (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

- (i) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- (ii) $\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y)$ (*Funktionalgleichung*)
<https://youtu.be/Uhaaq17qKNk> (2 min)
- (iii) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ <https://youtu.be/J1z7UEnFlhQ> (2 min)
- (iv) \exp ist streng monoton wachsend, d.h.
 $x > y \Rightarrow \exp(x) > \exp(y)$ <https://youtu.be/qvbDkDnbL0w> (1 min)
- (v) \exp ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$ <https://youtu.be/cXvwkH10YD8> (3 min)
- (vi) \exp ist diffbar $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $\exp' = \exp$
https://youtu.be/iVH99m_nI1E (4 min)
- (vii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
<https://youtu.be/olFF6w81-64> (1 min)
- (viii) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^n \exp(x) = 0$

Bemerkung: Wegen (ii) schreiben wir auch $\exp(x) = e^x$ und nennen \exp die e-Funktion.

Zeigen Sie Eigenschaft (viii). Die l'Hospitalsche Regel hilft.

Zeichnen Sie den Graph von \exp und erklären Sie daran möglichst viele Eigenschaften aus dem Satz.