Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 21/22
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 7 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 12.11.21

4.7 Umkehrfunktionen

Manchmal würden wir das, was eine Funktion gerade angerichtet hat, gerne rückgängig machen:

f^{-1}, die Umkehrfunktion https://youtu.be/hmYNFPL-tek (2 min) (1)

Kann das auch schiefgehen? https://youtu.be/ICCgCHpHNcQ (1 min) (2)

Die folgenden Eigenschaften stellen sicher, dass nichts schiefgeht.

Definition: Eine Funktion $f : A \to B$ (z.B. $A, B \subseteq \mathbb{R}$) heißt

- *surjektiv*, falls jedes $b \in B$ als Bild auftritt
  (in Formeln: $b \in B \;\Rightarrow\; \exists\, a \in A$ mit $f(a) = b$),
- *injektiv*, falls $\forall\, a_1, a_2 \in A$ gilt: $a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2)$,
- *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist.

Also: Bijektive Funktionen sind umkehrbar.

Überlegen Sie: Was hat der Graph von f^{-1} mit dem Graph von f zu tun?

Überlegen Sie: Sei $f : A \to B$ bijektiv. Von wo nach wo bildet $f \circ f^{-1}$ ab? Was ist $(f \circ f^{-1})(x)$? Und wie sieht's mit $f^{-1} \circ f$ aus?

Lässt sich fehlende Bijektivität "reparieren"?

Was ist, wenn f nicht surjektiv ist? https://youtu.be/01DEPAZIRHo (2 min) (3)

Was ist, wenn f nicht injektiv ist? https://youtu.be/dudai8AWwdw (2 min) (4)

Beispiele:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}_0^- &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{5}$$

https://youtu.be/hkwgVBTA_1Q (3 min)

Woher wissen wir, dass eine Funktion injektiv ist?

Monotonie! https://youtu.be/j3fthL3lguk (2 min) (6)

Beispiel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; f(x) = x^2 + x$ https://youtu.be/vG3cJXKmD6k (8 min) (7)

Satz 6. (Ableitung der Umkehrfunktion)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $f : I \to J$ bijektiv und diffbar. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ diffbar $\forall\, x \in J$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ und es gilt

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \,. \tag{8}$$

Von der Richtigkeit der Formel können wir uns z.B. graphisch oder rechnerisch mithilfe der Kettenregel überzeugen. $\rightsquigarrow$ *Livestream*

4.8 Der Logarithmus

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv. (**Warum?**)
Die Umkehrfunktion heißt (natürlicher) Logarithmus,

$$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,. \tag{9}$$

Es gilt also $\log(\mathrm{e}^x) = x$ und $\mathrm{e}^{\log x} = x$. **Für welche x?**

Bemerkung: Manchmal wird statt log auch ln (*logarithmus naturalis*) geschrieben.

Satz 7. (Eigenschaften des Logarithmus)

(i) $\log 1 = 0$ *und* $\log \mathrm{e} = 1$

(ii) $\log(xy) = \log x + \log y$

(iii) $\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$ *und* $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$

(iv) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Beweis für (ii) https://youtu.be/E1dWXnGi4yw (1 min) (10)

Beweis für (iv) https://youtu.be/awiRnzOnKzY (2 min) (11)

Begründen Sie selbst warum (i) und (iii) richtig sind.