

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 8 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 17.11.21

4.9 Weitere elementare Funktionen

Für $a > 0$ definieren wir die allgemeine Exponentialfunktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^+ durch $a^x := e^{x \log a}$. Es gilt dann

$$\log(a^x) = x \log a. \quad \text{https://youtu.be/3_3N78ZnmXy (1 min)} \quad (1)$$

Für $a \neq 1$ ist diese Funktion umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a ,

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}. \quad \text{https://youtu.be/GcK8YutoG6g (2 min)} \quad (2)$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die allgemeine Potenz als Funktion von \mathbb{R}^+ nach \mathbb{R}^+ durch $x^\alpha := e^{\alpha \log x}$. Für $\alpha \neq 0$ ist die Funktion umkehrbar, mit Umkehrfunktion

$$x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{https://youtu.be/syZ1__RjIzU (2 min)} \quad (3)$$

Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten folglich die **Rechenregeln**

- ▶ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
 - ▶ $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
 - ▶ $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$
-

4.10 Trigonometrische Funktionen

Wiederholen Sie, was Sie bereits über *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* gelernt haben. Die folgende Checkliste hilft.

- Ich kenne die Definition von \sin , \cos und \tan in rechtwinkligen Dreiecken.
- Ich kann \sin , \cos und \tan am Einheitskreis erklären.
- Ich kann erklären, warum $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
HINWEIS: Pythagoras am Einheitskreis.
- Ich kann am Einheitskreis erklären, warum $\sin(-x) = -\sin x$. Was gilt für $\cos(-x)$?
- Ich kenne spezielle Werte von \sin , \cos und \tan , z.B. an den Stellen $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.
- Ich kann die Graphen von \sin und \cos zeichnen (in ein Diagramm), und auch den Graph von \tan (in ein anderes Diagramm).
- Ich kenne die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:
(i) $\sin(x+y) = \dots$ (ii) $\cos(x+y) = \dots$

Schreiben Sie die Additionstheoreme auch im Spezialfall $y = x$ auf, und **zeigen Sie** damit: $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2(x)$.

- Ich kenne die Ableitung des Sinus: $\sin'(x) = \cos x$.
 Ich kann erklären, wie daraus $\cos'(x) = -\sin x$ folgt.
 HINWEIS: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ – warum?

Wo schaue ich nach, wenn ich etwas nicht kenne bzw. mich nicht mehr erinnere?

- ▶ Vorlesungsvideos:
https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_001_mathnat1_0001 (ab 00:21:52)
https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_002_mathnat1_0001 (bis 00:34:00)
 Klicken Sie im Video unten rechts auf \equiv , um ein Inhaltsverzeichnis zu bekommen, von dem Sie direkt an die gewünschte Stelle springen können.
- ▶ Skript: Abschnitt 4.10.
- ▶ KHANACADEMY: Trigonometrie-*Skills* auf Übungsblatt 4.

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sin x < x < \tan x. \quad \text{https://youtu.be/6AIcXdrktVg (2 min)} \quad (4)$$

Berechnen Sie damit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$.

Die Umkehrfunktion des Sinus heißt *Arcussinus* und hat viele Zweige. Für den Hauptzweig gilt:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{https://youtu.be/ggqKuk4H3xM (3 min)} \quad (5)$$

Die Ableitung können wir mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion bestimmen:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{https://youtu.be/n6AMv1GsS1c (3 min)} \quad (6)$$

Bestimmen Sie analog die Ableitung des Hauptzweigs des *Arcuskosinus*,

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]. \quad (7)$$

Überlegen Sie: Wo müssen wir den Tangens definieren, damit er bijektiv ist? Den Hauptzweig wählen wir so, dass 0 in der Definitionsmenge des Tangens enthalten ist.

Jetzt schauen wir uns noch die Ableitungen des Tangens und des *Arkustangens* an:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{https://youtu.be/Y5bGhX6S6B4 (2 min)} \quad (8)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{https://youtu.be/pBi7PqrespQ (1 min)} \quad (9)$$

Zeichnen Sie die Graphen des Arkustangens und seiner Ableitung.