

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 9 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 19.11.21

4.11 Potenzreihen

Wir spielen mit der geometrischen Summe aus Anleitung 1 und erhalten die

$$\text{geometrische Reihe: } \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} = \frac{1}{1-x} \quad \forall |x| < 1. \quad (1)$$

<https://youtu.be/GmZMn-s51CQ> (2 min)

Übrigens, für $x = \frac{3}{4}$ haben wir die geometrische Reihe bereits als Ausblick auf Anleitung 1 gesehen.

Können Sie ähnliche Formeln wie (1) für

$$\frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2-x} \quad \text{angeben?} \quad (2)$$

HINWEIS: Ersetzen Sie x in (1) geeignet.

Eine Summe mit Grenze ∞ nennen wir Reihe. Speziell interessieren uns jetzt

$$\text{Potenzreihen.} \quad \text{https://youtu.be/7Ar_0FVfbws} \quad (2 \text{ min}) \quad (3)$$

$$\text{Wozu könnte das gut sein?} \quad \text{https://youtu.be/Cgm09VWI6pw} \quad (2 \text{ min}) \quad (4)$$

Idee der *Taylorreihe* einer beliebigen Funktion:

$$\text{Idee in Bildern} \quad \text{https://youtu.be/fSg0ysTvWy4} \quad (3 \text{ min}) \quad (5)$$

$$\text{Quadratischer Term: } \frac{1}{2}f''(x_0) \quad \text{https://youtu.be/veR8Hj_-3Fc} \quad (3 \text{ min}) \quad (6)$$

$$\text{Alle Terme} \quad \text{https://youtu.be/M20xIh5dIHs} \quad (6 \text{ min}) \quad (7)$$

Dann nennen wir

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x-x_0)^{\nu} \quad \text{das } n\text{-te Taylorpolynom} \quad (8)$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x-x_0)^{\nu} \quad \text{die (formale) Taylorreihe} \quad (9)$$

von f um x_0 , und wir fragen uns:

- ▶ Ist das Taylorpolynom eine gute Näherung für $f(x)$?
- ▶ Konvergiert die Taylorreihe?

Antworten liefert...

Satz 8. (Taylor)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $n + 1$ mal diffbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + R_n(x), \quad (10)$$

und für $x > x_0 \exists \xi \in (x_0, x)$ (für $x < x_0 \exists \xi \in (x, x_0)$) mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (11)$$

R_n heißt (Lagrangesches) Restglied, x_0 heißt Entwicklungspunkt.

... den wir zunächst nicht beweisen wollen.

Hilfe! Was sagt uns der Satz? <https://youtu.be/PpmJQY1m-3A> (5 min) (12)

Schreiben Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion um Null auf, also für $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$. Im Livestream werden wir zeigen, dass diese Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $\exp(x)$ konvergiert.