

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 11 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 26.11.21

---

## 5 Vektorrechnung

*Was ist ein Vektor?* Wenn Sie jetzt an Pfeile denken und dann vielleicht noch ein Bild davon vor Augen haben, was es bedeutet, solche Pfeile zu addieren oder mit einer Zahl zu multiplizieren, dann ist das genau richtig. Wir fassen diese Vorstellung im Begriff des Vektorraums zusammen.

### 5.1 Vektorräume

**Definition:** <https://youtu.be/WSHVS4YtRRM> (6 min) (1)

**Bemerkungen:** <https://youtu.be/eHfn5Ht1bVA> (2 min) (2)

**Beispiele:**

- ▶  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}$  (d.h.  $V = \mathbb{R}$  und  $K = \mathbb{R}$ )
- ▶ Ebene  $\mathbb{R}^2$  oder Raum  $\mathbb{R}^3$  über  $\mathbb{R}$ . Allgemeiner:

$\mathbb{R}^n$  über  $\mathbb{R}$ . <https://youtu.be/b-5CLpaYc-c> (1 min) (3)

mit komponentenweiser Vektor-Addition und skalarer Multiplikation.

- ▶ Raum der Polynome (beliebigen Grads) über  $\mathbb{R}$

<https://youtu.be/j0frUvbua7I> (4 min) (4)

mit punktweiser Vektor-Addition und skalarer Multiplikation.

- ▶ Analog:  $C([a, b])$  über  $\mathbb{R}$ , der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ .
- 

### 5.2 Lineare Unabhängigkeit

**Definition:** (Lineare Unabhängigkeit & lineare Abhängigkeit)

Sei  $V$  ein Vektorraum. Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  heißen *linear unabhängig* (l.u.) genau dann, wenn gilt:

$$\text{Aus } \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0} \quad \text{folgt} \quad \lambda_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Sonst heißen sie *linear abhängig* (l.a.).

**Spezialfälle:**

$n = 1$  <https://youtu.be/5PCDB7hz2q8> (2 min) (6)

$n = 2$  <https://youtu.be/bB9tpLiWAKM> (3 min) (7)

**Erklären Sie:** Sind  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  l.u., so ist Koeffizientenvergleich möglich, d.h.

$$\text{aus } \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^n \mu_j \vec{a}_j \quad \text{folgt} \quad \lambda_j = \mu_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

**Bemerkung:** Sind  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$  l.u. so spannen sie den gesamten  $\mathbb{R}^n$  auf, d.h. für jeden Vektor  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  gibt es eindeutig bestimmte  $\lambda_j$ , so dass

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j. \quad (9)$$

Wie finden wir diese  $\lambda_j$ ? Durch Lösen eines linearen Gleichungssystems!

**Beispiel:**

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

**Überlegen Sie:**

- Sind die Vektoren l.u.?
- Können wir z.B.  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  als Linearkombination (LK) der  $\vec{a}_j$  darstellen?  
Wenn ja, wie?

---

Falls Sie (10) läppisch einfach fanden, dann denken Sie über folgende Fragen nach. Falls Sie (10) schwierig genug fanden, dann ignorieren Sie die folgenden Fragen vielleicht zunächst.

**Zusatzaufgabe:** Wir betrachten  $C(\mathbb{R})$ , den Vektorraum der stetigen Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Sind die Vektoren  $f_1, f_2$  und  $f_3$  in den folgenden Beispielen l.a. oder l.u.?

- $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \sinh(x)$
- $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = 1$

---