

## Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 12 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 01.12.21

---

### 5.3 Lineare Gleichungssysteme

Mit  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$  heißt

$$\sum_{j=1}^n x_j \vec{a}_j = \vec{b} \quad (1)$$

lineares Gleichungssystem (LGS) mit  $m$  Gleichungen für  $n$  Unbekannte.  
Das LGS heißt homogen, falls  $\vec{b} = \vec{0}$  und inhomogen, falls  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .

**Beispiel:**

$$\text{https://youtu.be/6CmZEgqSBLA (1 min)} \quad (2)$$

Die folgende Schreibweise betont die *Linearität*:

Wir definieren die lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch

$$L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \vec{a}_j, \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

und schreiben das LGS kurz als

$$L(\vec{x}) = \vec{b}. \quad (4)$$

**Im obigen Beispiel:**

$$\text{https://youtu.be/gGMqC3PQGUK (1 min)} \quad (5)$$

Was heißt jetzt *Linearität*? Für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  und für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt

$$L(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda L(\vec{x}) + \mu L(\vec{y}). \quad \text{https://youtu.be/39r48VJTv2c (1 min)} \quad (6)$$

Und was bringt *Linearität*? Damit verstehen wir die Struktur der Lösungsmenge

$$\mathcal{L}_{\vec{b}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{b} \right\} \quad (7)$$

besser, denn es gilt:

**Satz 9.** Sei  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Wenn  $\vec{x}_1^h, \vec{x}_2^h \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$  und  $\vec{y}^p \in \mathcal{L}_{\vec{b}}$ , dann gilt:

- (i)  $\lambda \vec{x}_1^h + \mu \vec{x}_2^h \in \mathcal{L}_{\vec{0}} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\vec{y} \in \mathcal{L}_{\vec{b}} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathcal{L}_{\vec{0}} \text{ mit } \vec{y} = \vec{y}^p + \vec{x}$ .

**Beweis:**

$$\text{Linearität bei der Arbeit.} \quad \text{https://youtu.be/INeNTsG8Tzc (5 min)} \quad (8)$$

$$\text{Aber was bringt das denn?} \quad \text{https://youtu.be/ScPe1f7svyg (1 min)} \quad (9)$$

---

Wie lösen wir so ein LGS ganz konkret?

Wir bringen es auf Zeilenstufenform (ZSF) und lesen die Lösung(en) ab!

Übersichtlicher wird das mit einer

Kurzschreibweise. <https://youtu.be/Q6K1F7-TrTo> (2 min) (10)

Dann starten wir mit

$$\left( \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n \mid \vec{b} \right) \quad (11)$$

und formen um, bis das LGS so aussieht (ZSF):

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} \blacksquare & * & * & * & \cdots & & * & \cdots & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & & * & \cdots & * & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & \cdots & * & \tilde{b}_3 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & \tilde{b}_r \\ 0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ m - r \text{ Zeilen} \end{array} \quad (12)$$

Kennzeichen der ZSF:

- $\blacksquare$  sind Zahlen  $\neq 0$ .
- \* sind irgendwelche Zahlen.
- Links (und unterhalb) von  $\blacksquare$  stehen nur Nullen.
- Stufen von  $\blacksquare$  zu  $\blacksquare$ : eine Zeile nach unten, mindestens eine Spalte nach rechts.

<https://youtu.be/1F1qlAEMg-c> (3 min) (13)

Lösung des LGS:

- Zeile der Form  $(0 \cdots 0 | \tilde{b}_j)$  mit  $\tilde{b}_j \neq 0$  bedeutet: LGS hat keine Lösung.
- Spalten ohne  $\blacksquare$  entsprechen frei wählbaren Variablen (parametrisiere so die Lösung).
- Variablen, die Spalten mit  $\blacksquare$  entsprechen, sind durch die Zeile, in der  $\blacksquare$  steht, festgelegt (von unten nach oben arbeiten).

<https://youtu.be/71b5X1KYUmY> (3 min) (14)

**Überlegen Sie:** Wie viele (und welche) Lösungen haben die LGS mit den folgenden ZSFen?

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad \text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \text{c) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (15)$$