

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 13 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 03.12.21

---

## 5.4 Unterräume, Dimension und Basis

**Definition:** (Dimension)

Sei  $V$  ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in  $V$  heißt Dimension von  $V$ ,  $\dim V$ .

**Beispiel:**  $\dim \mathbb{R}^n = n$     [https://youtu.be/RZf1\\_DEw01E](https://youtu.be/RZf1_DEw01E) (4 min)    (1)

---

**Definition:** (Unterraum)

Sei  $V$  ein Vektorraum (über  $K$ ).  $U$  heißt Unterraum von  $V$ , falls gilt:

- (i)  $U \subseteq V$ , und
- (ii)  $U$  ist ein Vektorraum (über  $K$ ).

**Bemerkungen:**

- ▶ Abgeschlossenheit
- ▶  $\dim U \leq \dim V$     <https://youtu.be/Ag0rdXxsjXE> (2 min)    (2)

**Beispiele:**

- ▶ triviale Unterräume
  - ▶  $\mathcal{L}_0$     <https://youtu.be/440hqk4ZWPI> (4 min)    (3)
- 

**Definitionen:** (Lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis)

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ .

- ▶ Die Menge aller Linearkombinationen,

$$\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \left\{ \vec{x} \in V \mid \vec{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j, \lambda_j \in K \right\}, \quad (4)$$

heißt *lineare Hülle* (oder *Aufspann*) von  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ .

- ▶ Die Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  heißen *Erzeugendensystem* von  $V$ , falls gilt

$$\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = V. \quad (5)$$

Wir sagen dann auch, sie spannen  $V$  auf.

- ▶ Sind die Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  l.u. und bilden ein Erzeugendensystem von  $V$ , so nennen wir sie eine *Basis* von  $V$ .

**Bemerkungen:**

- ▶  $\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  ist ein Unterraum von  $V$ .
- ▶ Die Anzahl der Vektoren einer Basis von  $V$  ist gleich  $\dim V$ .

**Beispiele:**

► 
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (6)$$

<https://youtu.be/pNw8uco9PdE> (2 min)

► Die kanonischen Einheitsvektoren  $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ .

<https://youtu.be/fe4yT0oNxqI> (2 min) (7)

**Überlegen Sie:** Bilden die folgenden Vektoren ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^3$ ?  
Falls ja, sind sie auch eine Basis?

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (8)$$

---

**Bestimmen Sie** die Lösungsmenge  $\mathcal{L}_0$  von

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right). \quad (9)$$

Was ist  $\dim \mathcal{L}_0$ ? Nennen Sie die Spalten des LGS  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$ .

Was ist die Dimension von  $\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4)$ ?

---

**Satz 10.**

Seien  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ . Die Dimension von  $\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  ist gleich der Anzahl der ■ in der Zeilenstufenform von

$$(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n \mid \vec{0}). \quad (10)$$

**Begründung:**

<https://youtu.be/FnSrunJqSAQ> (4 min) (11)

**Bemerkung:**

Dimensionssatz für lineare Abbildungen  
<https://youtu.be/yUK1DrKeFH0> (4 min) (12)

---

**Verständnisaufgabe:** Betrachten Sie den Raum aller Polynome vom Grad  $\leq 3$ . Wir nennen diesen Raum  $V$ . Was ist  $\dim V$ ? Geben Sie auch eine Basis an. Nun definieren wir die lineare Abbildung  $L : V \rightarrow V$  durch  $L(P) = P'$ , d.h. wir bilden ein Polynom auf seine Ableitung ab. Begründen Sie, dass

$$\ker L = \{P \in V \mid L(P) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{im } L = \{Q \in V \mid \exists P \in V \text{ so dass } L(P) = Q\} \quad (13)$$

Vektorräume sind, und bestimmen Sie jeweils die Dimension.