Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 14 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 08.12.21

Interludium: 7 Komplexe Zahlen

Wir finden es doof, dass wir keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können, und erfinden deshalb die neue Zahl $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Dann gilt z.B.

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\mathrm{i}\,. \tag{1}$$

Jetzt bilden wir Zahlen der Form

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \text{mit} \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

und nennen sie komplexe Zahlen – Symbol: $\mathbb{C}$.

Mit denen rechnen wir wie gewohnt. https://youtu.be/mEQQtukN0zo (3 min) (3)

Summen, Differenzen und Produkte sind also auch wieder komplexe Zahlen.

Können wir auch dividieren? https://youtu.be/_doCXvQXPLk (4 min) (4)

Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= x && \text{den Realteil von } z\,, \\ \operatorname{Im} z &= y && \text{den Imaginärteil von } z \quad \text{und} \\ \overline{z} &= x - \mathrm{i}y && \text{das Komplexkonjugierte von } z\,. \end{aligned} \tag{5}$$

(Mit $\overline{z}$ haben wir gerade eben erweitert, um das mit dem Dividieren hinzubekommen.) **Rechnen Sie** nach, dass

$$z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\,. \tag{6}$$

OK, aber was soll der Quatsch? Diese Zahlen gibt's doch gar nicht. Doch!

Gaußsche Zahlenebene https://youtu.be/jTlC8-4PWoo (3 min) (7)

Dann ist $\mathbb{C}$ *also die coolere Version von* $\mathbb{R}^2$*?* Ja. Aber da geht noch mehr! Um gleich auch die Multiplikation anschaulich zu verstehen, führen wir zunächst die Polardarstellung ein:

$$\begin{array}{lll} \text{Betrag:} & r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \\ \text{Argument:} & \phi = \arg z = \arctan \frac{y}{x} & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{array} \tag{8}$$

https://youtu.be/VR3_ouK9owQ (3 min)

Übrigens: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

7.1 Komplexe e-Funktion

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir e^z durch die Taylorreihe der Exponentialfunktion...

$$\textit{Wieso?} \qquad \texttt{https://youtu.be/mfrwsEWHnG0}\ (2\,\mathrm{min}) \tag{9}$$

...und dann können wir ausrechnen, dass $\forall \phi \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\,. \qquad \texttt{https://youtu.be/ufHiIu7aGL4}\ (5\,\mathrm{min}) \tag{10}$$

Wegen der Funktionalgleichung der e-Funktion bewirkt Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ also eine

$$\text{Drehung um den Winkel } \phi. \qquad \texttt{https://youtu.be/dS08r9lm23w}\ (3\,\mathrm{min}) \tag{11}$$

Warum sind wir uns eigentlich sicher, dass $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ auch für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt?

Begründen Sie, warum nun $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi$ gilt.

Drücken Sie damit Sinus und Kosinus durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ aus.

Anwendungen:

$$\text{Additionstheoreme} \qquad \texttt{https://youtu.be/WsdEMxu0MSg}\ (2\,\mathrm{min}) \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu x) \qquad \texttt{https://youtu.be/HSw41yk4rNo}\ (7\,\mathrm{min}) \tag{13}$$

Eigentlich waren wir doch in letzter Zeit beim Thema Vektorrechnung...

Ja, das können wir auch mit komplexen Zahlen machen!

Wenn wir einen Vektorraum V über einem Körper K betrachten, dann können die komplexen Zahlen sowohl bei den Vektoren, als auch bei den Skalaren auftauchen:

- $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$

https://youtu.be/QDRM6TqUN3M (4 min) (14)

Als $\mathbb{C}^2$ bezeichnen wir den Raum der zwei-komponentigen Vektoren mit komplexen Einträgen. **Überlegen Sie:** Welche Dimension hat $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$? Welche als Vektorraum über $\mathbb{C}$? Können Sie jeweils eine einfache Basis angeben?