Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 15 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 10.12.22

5.5 Skalarprodukt und Norm

Vektorrechnung – was bisher geschah. https://youtu.be/y05d4Szutpo (3 min) (1)

Definition: (Norm)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm,
wenn $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(N1) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
(N2) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\|\vec{a}\|$
(N3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Dreiecksungleichung)

Definition: (Skalarprodukt)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt,
wenn $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(S1) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$ (symmetrisch)[1]
(S2) $\langle\vec{a}, \lambda\vec{b}\rangle = \lambda\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$
$\langle\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle$ (linear)
(S3) $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$, wobei $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$ (positiv definit)

Warum definieren wir das so? https://youtu.be/koKWE_Ed_7c (5 min) (2)

Überlegen Sie: Sind durch die folgenden Abbildungen Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 \tag{3}$$
$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \tag{4}$$
$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 2a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2 \tag{5}$$

Jetzt verknüpfen wir Skalarprodukt und Norm geschickt miteinander:

Satz 11. (Norm)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Jedes Skalarprodukt, $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ induziert eine Norm, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$, gegeben durch

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle}\,. \tag{6}$$

Beweis: (N1) & (N2) https://youtu.be/sXuIxy1nL-0 (3 min) (7)

[1] Wenn wir Skalarprodukte für Vektorräume über $\mathbb{C}$ betrachten, werden wir (S1) modifizieren müssen.

Für (N3) beweisen wir zunächst:

Lemma 12. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Skalarprodukt und induzierte Norm erfüllen

$$|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle| \le \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V\,. \tag{CS}$$

Beweis: (CS) https://youtu.be/qS6p-kNWgTk (5 min) (8)

Beweis: (N3) https://youtu.be/syskCRm9g2Q (2 min) (9)

Anschauliche Bedeutung

Norm: Länge des Vektors https://youtu.be/Zs_ioKlnfcI (3 min) (10)

Skalarprodukt (SP) und Winkel

kanonisches SP auf $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^n$ https://youtu.be/Z7chFSHD9Kg (5 min) (11)

SPe auf beliebigen Vektorräumen https://youtu.be/nD69po8oeXg (2 min) (12)

Einheitsvektoren und Projektionen https://youtu.be/gagnc06BEKE (3 min) (13)

Definition: (Orthogonalität)
Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ heißen orthogonal zueinander, falls $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$.

Beispiel https://youtu.be/ZJuzkw8y128 (2 min) (14)

Überlegen Sie: Was gilt nun für den Winkel zwischen orthogonalen Vektoren?

Bemerkung: Aus Orthogonalität folgt lineare Unabhängigkeit.

https://youtu.be/N4azhw0-Ls8 (4 min) (15)

Definition: (Orthonormal-Basis)
Eine Basis, deren Elemente paarweise orthogonal sind, heißt Orthogonal-Basis. Sind die Vektoren zusätzlich normiert, d.h. haben sie alle Norm 1, dann bilden sie eine Orthonormal-Basis (ONB).

Beispiele für $V = \mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bilden eine ONB,} \tag{16}$$

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ebenfalls.} \tag{17}$$

Basis-Entwicklung eines Vektors:
Sei $\{\vec{c}_j\}$ eine ONB von V. Wollen wir $\vec{b} \in V$ als Linearkombination der Basisvektoren schreiben, also

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{\dim V} \lambda_j\, \vec{c}_j\,, \tag{18}$$

so gilt $\lambda_j = \langle \vec{c}_j, \vec{b}\rangle$.

Warum? Probieren Sie's aus, z.B. für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Basen (16) und (17).