

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 16 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 15.12.21

5.5 Skalarprodukt und Norm (Fortsetzung)

Orthonormalbasen sind also schön. Was machen wir, wenn wir "nur" eine Basis haben?

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Gegeben: Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von V .

Gesucht: ON-Basis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ von V .

Lösung:

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} \quad (1)$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2 \rangle \vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} \quad (2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \vec{c}_j, \vec{a}_n \rangle \vec{c}_j \quad \vec{c}_n = \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|} \quad (3)$$

Warum sollte das klappen? https://youtu.be/m_ySSTGld70 (7 min) (4)

Beispiel: \mathbb{R}^3 mit kanonischem Skalarprodukt,

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2). \quad (5)$$

<https://youtu.be/GhRDuJskXDo> (5 min)

Überlegen Sie: Was passiert, wenn wir das Verfahren auf Startvektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ anwenden, die l.a. sind, die also keine Basis bilden?

5.6 Kreuzprodukt und Spatprodukt im \mathbb{R}^3

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das **Kreuzprodukt** (oder Vektorprodukt) durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Vorbemerkung: <https://youtu.be/yJbe5TyoG7I> (2 min) (7)

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Satz 13. (Eigenschaften von \times) Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikommutativ)
- (ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- (iii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
- (iv) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Fläche des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms}$
- (v) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b} (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts)
- (vi) falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, bilden \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem (rechte Hand-Regel)

Beweis:

(i), (ii) & (iii) <https://youtu.be/nWCERXnw54I> (3 min) (8)

(iv) <https://youtu.be/BkMkborXjNM> (6 min) (9)

(v) https://youtu.be/IffhkJv0A_o (3 min) (10)

Rechnen Sie nach, dass $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ gilt (mit den kanonischen Einheitsvektoren \vec{e}_j).

(vi) <https://youtu.be/USNWNqjqPEk> (5 min) (11)

Überlegen Sie: Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$?

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das **Spatprodukt** durch

$$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{12}$$

Eigenschaften:

- ▶ $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = |\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}| = |\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}|$
- ▶ $|\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}| = -|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$
- ▶ Der Betrag von $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$ ist gleich dem Volumen des, von den Vektoren aufgespannten, Parallelepipeds bzw. Spats.

Begründung:

<https://youtu.be/lzmHv6HPmRw> (4 min) (13)

Reprise: 7 Komplexe Zahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ suchen wir alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$. Wir verwenden die Polardarstellung $z = re^{i\phi}$. **Überlegen Sie:** Welche Bedingungen müssen r und ϕ erfüllen?

Vorschau: 5.7 Geraden und Ebenen

Welche Darstellungen für Geraden und Ebenen (im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3) kennen Sie? Welche Begriffe fallen Ihnen im Zusammenhang mit Geraden, Ebenen und Vektoren ein?