Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 21/22
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 17 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 17.12.21

5.7 Geraden und Ebenen

Geraden in $\mathbb{R}^2$ können wir entweder durch

- zwei Punkte oder
- einen Punkt und die Richtung der Geraden oder
- einen Punkt und die Richtung senkrecht zur Geraden

festlegen.

https://youtu.be/4PeLewXT9VQ (9 min) (1)

Analog legen wir Ebenen in $\mathbb{R}^3$ entweder durch

- drei Punkte oder
- einen Punkt und zwei (l.u.) Richtung in der Ebene oder
  (zwei Punkte und eine Richtung in der Ebene oder)
- einen Punkt und die Richtung senkrecht zur Ebene

fest.

https://youtu.be/a_hFRThkSq8 (5 min) (2)

Beispiel: Die beiden folgenden Parameterdarstellungen beschreiben die gleiche Ebene.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t\,,\ \ s,t \in \mathbb{R} \right\} \\ E_2 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,\ \ s,t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

Hätten Sie das gesehen – oder auch nur vermutet? Wieso oder wieso nicht?
Überlegen Sie, bevor Sie das nächste Video anschauen, wie Sie das zeigen würden.

https://youtu.be/lXIE8WSx9HM (6 min) (4)

5.8 Kurven und spezielle Koordinatensysteme

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ kennen wir bereits von der Polardarstellung komplexer Zahlen. Das geht auch ohne i!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$ https://youtu.be/pThJj1qMgSo (3 min) (5)

Die Einheitsvektoren in r- und ϕ-Richtung bilden auch eine Orthonormalbasis,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$ https://youtu.be/EccgpE4-KzM (3 min) (6)

Definition: (Kurve, Geschwindigkeit)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{x} :\ I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{heißt Kurve in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{7}$$

https://youtu.be/KoOkewZpNDo (2 min)

Die (Momentan-)Geschwindigkeit (entlang der Kurve) ist die (komponentenweise) Ableitung nach t,

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

https://youtu.be/YZjcQoh9iJc (3 min)

Beispiele: (immer $t \in \mathbb{R}$)

- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ (9)
- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$ (10)
- $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$ (11)

Überlegen Sie: Was sind das für Kurven?
HINWEIS: Vielleicht sind Geraden oder Parabeln dabei.
Bestimmen Sie auch jeweils die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$.

Nun kombinieren wir Kurven und Polarkoordinaten. Wir geben an, wie sich r und ϕ mit t ändern, und erhalten die Kurve

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos\left(\phi(t)\right) \\ \sin\left(\phi(t)\right) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Beispiele:

- $\phi(t) = t, \qquad r(t) = 2\,, \qquad t \in [0, 2\pi)$ (13)
- $\phi(t) = t, \qquad r(t) = 1 + \frac{t}{2\pi}\,, \qquad t \in [0, 2\pi)$ (14)

Überlegen Sie: Was sind das für Kurven?
HINWEIS: Vielleicht sind Kreise o.Ä. dabei.

Und was ist das hier? $\qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$ (15)

Die Geschwindigkeit einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve können wir auch allgemein berechnen:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi \tag{16}$$

https://youtu.be/0yx1FhySe08 (3 min)