

## Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 18 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 22.12.21

---

### 5.8 Kurven und spezielle Koordinatensysteme (Fortsetzung)

Die Polardarstellung gibt's auch für  $\mathbb{R}^3$ , genannt **Kugelkoordinaten**:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} r \in [0, \infty) \\ \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi) \end{array}. \quad (1)$$

<https://youtu.be/39wyFoV5v0g> (6 min)

**Geben Sie** die folgenden Punkte  $(x, y, z)$  aus  $\mathbb{R}^3$  in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  an:

$$(0, 0, -1) \quad (3, 0, 0) \quad (-1, 0, 0) \quad (0, 2, 0) \quad (1, 1, \sqrt{2}) \quad (2)$$

---

## 6 Matrizen und Determinanten

### 6.1 Matrizen

**Definition:** Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist ein rechteckiges Zahlenschema,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Die  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  (oder  $\in \mathbb{C}$ ) heißen Elemente (oder Komponenten) der Matrix. Wir schreiben

$$A = (a_{ij}) \quad (4)$$

und sagen  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (bzw.  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ).

$$\text{https://youtu.be/hIGIFzfkxZo} \quad (3 \text{ min}) \quad (5)$$

Multiplikation mit Skalaren definieren wir komponentenweise, ebenso die Addition von Matrizen gleichen Typs:

$$\text{https://youtu.be/I-6reHcRRMk} \quad (2 \text{ min}) \quad (6)$$

So wird  $\mathbb{R}^{m \times n}$  zu einem Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Dimension  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ .

**Können Sie** eine einfache Basis angeben?

---

Für zwei Matrizen  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$  und  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$  definieren wir das **Matrixprodukt** durch

$$C = AB \quad \text{mit} \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}. \quad (7)$$

Kurz: Zeile mal Spalte.

*Huch? Beispiel bitte!*     [https://youtu.be/-5HAehcrT\\_s](https://youtu.be/-5HAehcrT_s) (5 min)     (8)

**Wichtig:** Es kommt auf die Reihenfolge an!

<https://youtu.be/gni9umjkWv0> (3 min)     (9)

Ansonsten gelten die gleichen **Rechenregeln** wie bei Produkten von Zahlen:

- ▶  $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B,$   
 $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2,$
- ▶  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  und
- ▶  $A(BC) = (AB)C,$

wobei  $\lambda$  skalar, alles andere Matrizen – Typen so, dass alle Produkte definiert sind.

Multiplizieren wir quadratische Matrizen, sagen wir  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so bleibt der Typ erhalten, d.h.  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die **Einheitsmatrix**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (10)$$

übernimmt die gleiche Rolle wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen, d.h.

$$AI = IA = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (11)$$

Probieren Sie das aus! **Berechnen Sie**  $AB, BA, AI, IA, BI$  und  $IB$  für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $m \times n$ . Vertauschen wir Zeilen mit Spalten, so erhalten wir eine Matrix vom Typ  $n \times m$ :  $A^T$ , die **Transponierte** von  $A$ .

<https://youtu.be/q0CfILmmdR0> (2 min)     (13)

**Überlegen Sie:** Wenn  $A$  vom Typ  $m \times n$  ist, welche Form haben dann  $AA^T$  und  $A^TA$ ?

**Überzeugen Sie sich hiervon:** Fassen wir Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  als Spaltenmatrizen auf, also  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , so können wir das kanonische Skalarprodukt wie folgt durch ein Matrixprodukt ausdrücken:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}. \quad (14)$$

Dabei bezeichnet der Punkt links das kanonische Skalarprodukt, rechts multiplizieren wir Matrizen.