

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 20 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 14.01.22

6.2 Determinanten

Die Determinante einer 2×2 -Matrix gibt den Flächeninhalt des von den Spalten aufgespannten Parallelogramms an (mit Orientierung/Vorzeichen). Jetzt suchen wir eine Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

die das Volumen des, von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Parallelepipeds liefert. Gewünschte Eigenschaften:

- (i) linear in jeder Spalte
- (ii) normiert <https://youtu.be/bZ2LQAJI-Ig> (4 min) (2)
- (iii) alternierend

Was folgt aus diesen anschaulich motivierten Wünschen?

$$(i) \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n C_{j_1 \dots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \quad (3)$$

<https://youtu.be/tUdfK0coWbI> (3 min)

$$(ii) \Rightarrow C_{123\dots n} = 1 \quad \text{https://youtu.be/3eWnmXDd2P8} \quad (2 \text{ min}) \quad (4)$$

$$(iii) \Rightarrow C_{\dots j_k \dots j_l \dots} = -C_{\dots j_l \dots j_k \dots} \quad \text{https://youtu.be/F0xULISezPI} \quad (4 \text{ min}) \quad (5)$$

Damit ist det festgelegt!

Das sah wild aus! Kommt für $n = 2$ und $n = 3$ wirklich das raus, was wir schon kennen?

$$n = 2 \quad \text{https://youtu.be/8bI0aLTeoBU} \quad (2 \text{ min}) \quad (6)$$

$$n = 3 \quad \text{https://youtu.be/5JySDsoERw0} \quad (5 \text{ min}) \quad (7)$$

Aber zum Berechnen ist das doch aufwändig. Besser geht's mit diesen Beobachtungen:¹

- Für obere Dreiecksmatrizen: Produkt der Diagonalelemente

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (8)$$

- Vertauschen wir zwei Spalten (oder zwei Zeilen!), so ändert sich die Determinante um einen Faktor (-1) .
- Addieren wir das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht.

<https://youtu.be/9NQ6WkgfDT4> (5 min) (9)

Also nutzen wir den (eingeschränkten) Gauß-Algorithmus!

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 11 \\ 2 & 8 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -6 \quad \text{https://youtu.be/muYZvrVQ1Do} \quad (2 \text{ min}) \quad (10)$$

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & \pi & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & \pi & 8 \\ 5 & -7 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Auch hilfreich ist gelegentlich der folgende Satz (ohne Beweis).²

Satz 15. (Determinantenmultiplikationssatz)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{n \times n}$). Dann gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \quad (12)$$

Begründen Sie, dass damit auch $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ gilt.

Beliebt zum Berechnen von Determinanten (aber auch etwas überbewertet) ist auch der Laplacesche Entwicklungssatz, im Skript **Satz 16**. Die Formel sieht abschreckend aus, ich erkläre Ihnen daher lieber nur, wie Sie den Satz anwenden können:

<https://youtu.be/OuovVGWg5CI> (6 min) (13)

¹Erklärungen zu den drei Beobachtungen im Video darunter.

²Interessierte finden im Skript einen Beweis.