Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 21 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 19.01.22

Reprise: 7.2 Komplexe Vektorräume: Skalarprodukte

Skalarprodukte auf Vektorräumen über $\mathbb{R}$ mussten die drei Bedingungen (S1), (S2) und (S3) erfüllen (siehe Anleitung 15). Fordern wir für Skalarprodukte auf Vektorräumen über $\mathbb{C}$ dieselben Eigenschaften, so gibt es keine Skalarprodukte:

https://youtu.be/qeb_sMdz5LM (3 min) (1)

Als Lösung modifizieren wir die erste Bedingung:

$$(\mathrm{S1})' \qquad \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle}$$ https://youtu.be/-PUGVTezJhk (5 min) (2)

Beispiel: Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, w_j \,.$$ https://youtu.be/9b98j3Sb5RM (5 min) (3)

Berechnen Sie $\|\vec{z}\|$, $\|\vec{w}\|$ und $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$ für

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ und der zugehörigen Norm.

Bei **Matrizen** mit komplexen Einträgen bleibt alles wie gehabt. Die komplexkonjugierte Matrix bestimmen wir komponentenweise, z.B.

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & \mathrm{i}-2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i}-2 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Gilt dann $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$?

Geben Sie $\overline{A}$, A^T sowie $\overline{A}^T$ an für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

und berechnen Sie $\overline{A}^T A$ sowie $A\overline{A}^T$.

Drücken Sie das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ mithilfe des Matrixprodukts aus.

Determinanten berechnen wir genau gleich wie bei reellen Matrizen,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 2 & -\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -4 + 6\mathrm{i} \,.$$ https://youtu.be/u9mSXMelalI (2 min) (7)

Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a+b & c-\mathrm{i}d \\ c+\mathrm{i}d & a-b \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

---

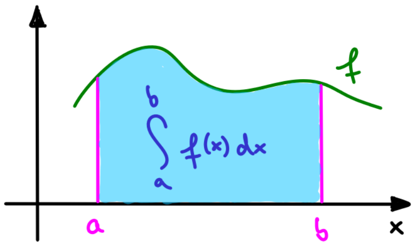
8. Integration

Definition: (Stammfunktion)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.
Eine diffbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f,
falls gilt $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in I$.

Bemerkung: Besitzt f eine Stammfunktion, so besitzt f viele Stammfunktionen.

https://youtu.be/4ubb1DXx15U (2 min) (9)

Wir nennen die **Fläche unter dem Graph** einer Funktion das Integral.



https://youtu.be/baUMwBeXZJk (2 min) (10)

Behauptung: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{ist eine Stammfunktion von } f. \tag{11}$$

https://youtu.be/_jHzCakg1KM (5 min)

Damit können wir Integrale wie folgt berechnen,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,, \tag{12}$$

https://youtu.be/Ux_Cw9m0BNo (2 min)

wobei F hier eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Beispiele: ($\alpha \neq -1$, $\omega \in \mathbb{R}$)

$$\int_1^3 x^\alpha\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{13}$$

https://youtu.be/aDXe6Vr0aso (4 min)

Berechnen Sie:

$$\int_2^3 \frac{x^2+x-1}{x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

Überlegen Sie:

$$\text{Wenn} \qquad F(x) = \int_0^{x^4} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{ist, wie sieht dann } F'(x) \text{ aus?} \tag{15}$$
